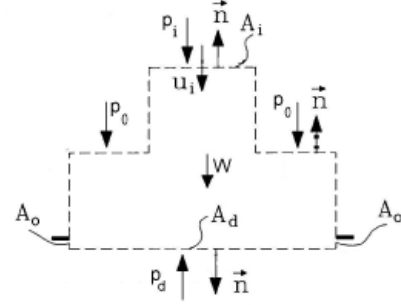


ME33A - Mecánica de Fluidos Guía Control 2

Problema 1

La figura muestra en forma esquemática un hovercraft de peso total W . El aire es bombeado por el ventilador (sección de paso A_i , presión p_i) al interior de la cámara de presión (área A_d) donde se mantiene una presión constante p_d . El aire sale de la cámara de presión por un área de salida circunferencial A_o . Suponiendo despreciables la velocidad dentro de la cámara de presión y el roce con las paredes, se pide determinar el caudal volumétrico Q que debe suministrar el ventilador.

Datos: A_i , A_o , A_d , p_0 , W , ρ .



Sol.:

Para el VC mostrado se debe realizar un balance de fuerzas. La componente de interés es la componente según z . La ecuación a resolver es, por lo tanto, la de cantidad de movimiento lineal para el caso permanente:

$$\sum \vec{F} = \int_{SC} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

Las fuerzas externas aplicadas sobre el VC se originan en el peso del hovercraft y la fuerza originada en las distintas presiones que se encuentran aplicadas sobre las distintas superficies de la superficie de control (SC).

$$\sum F_z = -W - p_0 (A_d - A_i) - p_i A_i + p_d A_d.$$

A la salida del flujo de aire del hovercraft no hay componente de flujo de cantidad de movimiento en la dirección z , es decir:

$$\int_{SC} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \cdot \hat{z} = \rho u_i^2 A_i$$

\Rightarrow

$$-W - p_0 (A_d - A_i) - p_i A_i + p_d A_d - \rho u_i^2 A_i = 0.$$

La velocidades u_i y u_o a la entrada y salida del hovercraft se obtienen de la ecuación de continuidad, en terminos del caudal Q , que para un flujo incompresible resulta:

$$u_i = \frac{Q}{A_i},$$

$$u_o = \frac{Q}{A_o}.$$

Las presiones p_i y p_d se obtienen de aplicar la ecuación de Bernoulli apropiadamente. Despreciando las diferencias de altura y aplicando Bernoulli entre un punto lejano ($V \approx 0$) del hovercraft y la entrada se obtiene:

$$p_0 = p_i + \frac{1}{2}\rho u_i^2 = p_i + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{Q}{A_i} \right)^2.$$

\Rightarrow

$$p_i = p_0 - \frac{1}{2}\rho \left(\frac{Q}{A_i} \right)^2.$$

Análogamente se obtiene

$$p_d = p_0 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{Q}{A_0} \right)^2.$$

Reemplazando u_i , p_i y p_d en la ecuación de balance de fuerzas y resolviendo para Q se obtiene finalmente:

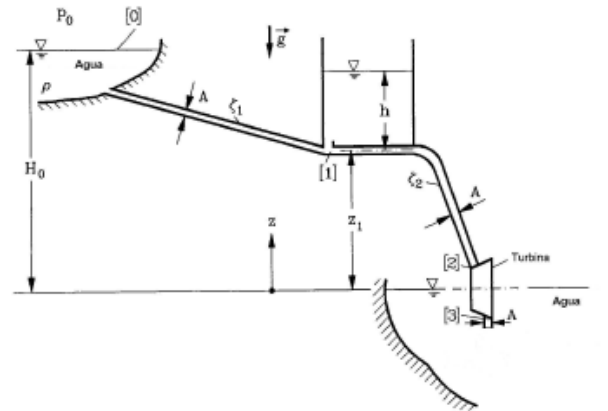
$$Q = \sqrt{\frac{2W}{\rho \left(\frac{A_d}{A_0^2} - \frac{1}{A_i} \right)}}.$$

Problema 2

Por la central hidráulica de la figura circula un caudal volumétrico Q . Las pérdidas de presión en las distintas secciones de la tubería se estiman como $\Delta p_i = \frac{1}{2}\zeta_i \rho V^2$. Suponiendo que el tamaño de la turbina es despreciable en relación a los demás datos geométricos del sistema, se pide determinar:

1. El nivel h en el estanque de amortiguamiento para una operación estacionaria.
2. La presión total p_t a la entrada de la turbina (punto [2]).
3. La diferencia de presión total a través de la turbina para el caso en que la salida de ésta está por debajo del nivel del agua aguas abajo de la turbina (ver figura).

Datos: Q , A , H_0 , p_0 , z_1 , ρ , ζ_1 , ζ_2 .



Sol.:

a) Determinar altura h del estanque de amortiguamiento.

Realizando Bernoulli entre el punto [0] y el punto [1] se obtiene

$$p_0 + \rho g H_0 = p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \zeta_1 \rho V_1^2$$

La velocidad V_1 se obtiene del caudal Q y el área de paso A : $V_1 = (Q/A)$.

Para el estanque de amortiguamiento se puede obtener la presión p_1 como la presión hidrostática $p_1 = p_o + \rho g h$.
Reemplazando todo en la ecuación anterior y despejando h se obtiene:

$$h = (H_0 - z_1) - \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{A} \right)^2 (1 + \zeta_1)$$

b) Presión total en [2], p_{t2} .

La presión total se define como la suma de la presión estática, hidroestática y dinámica, es decir,

$$p_t = p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho V^2.$$

En el punto [2] se tiene por lo tanto:

$$p_{t2} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2.$$

La velocidad $V_2 = (Q/A) = V_1$. La presión estática p_2 se obtiene usando la ecuación de Bernoulli entre el punto [0] y el punto [2] por ejemplo (también se podría hacer entre [1] y [2]).

$$p_0 + \rho g H_0 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q}{A} \right)^2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q}{A} \right)^2 (\zeta_1 + \zeta_2).$$

Reemplazando se obtiene:

$$p_{t2} = p_0 + \rho g H_0 - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q}{A} \right)^2 (\zeta_1 + \zeta_2).$$

c) Diferencia de presiones totales entre [2] y [3], Δp_{t23} .

La velocidad a la salida de la turbina es $V_3 = (Q/A)$. La presión es igual a la presión atmosférica dado que las dimensiones de la turbina son despreciables. La presión total en [3] es, por lo tanto:

$$p_{t3} = p_0 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{Q}{A} \right)^2.$$

\Rightarrow

$$\Delta p_{t23} = p_{t2} - p_{t3} = \rho g H_0 - \frac{1}{2}\rho \left(\frac{Q}{A} \right)^2 (1 + \zeta_1 + \zeta_2).$$

Problema 3

Un ventilador tiene un rotor con álabes, con un diámetro externo de 12 [in] y 10 [in] de diámetro interno, como se ve en la figura 3. La altura de cada álabe del rotor es constante a 1 [in] desde la entrada a la salida del álabe. El flujo de aire es permanente, con $Q = 230$ [ft³/min], y la velocidad del aire a la entrada del álabe, v_1 , es radial. El ángulo de descarga del álabe es de 30° con respecto a la dirección tangencial. Si el rotor gira a una velocidad constante de 1725 rpm, estime la potencia necesaria para hacer funcionar el ventilador.

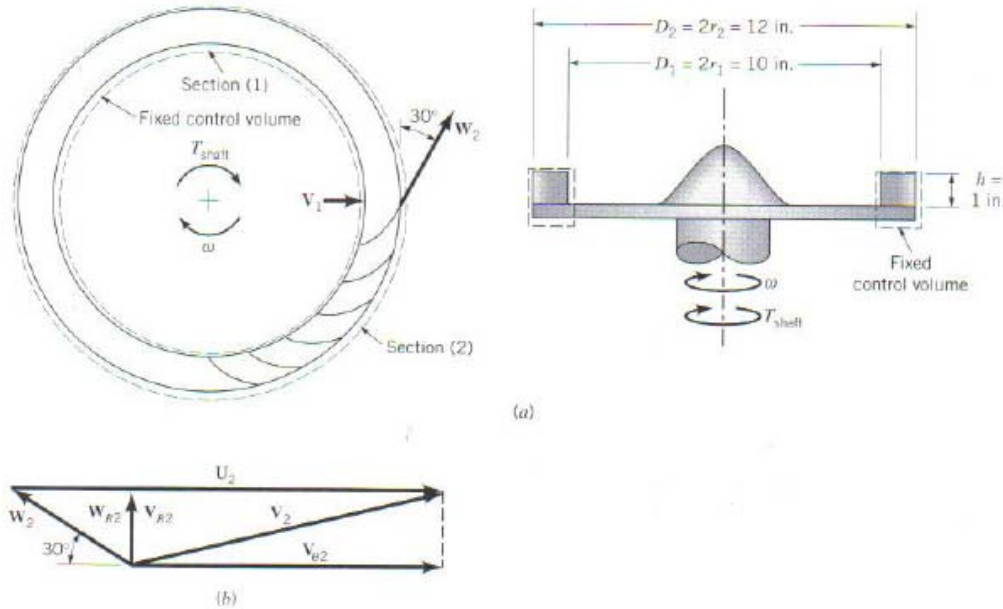


Figura 3: Ventilador

Solución

Se selecciona un volumen de control que incluye los álabes rotatorios (los sigue) y el fluido dentro de la fila de álabes en un instante, como se indica en la figura 3a con línea punteada. El flujo dentro del volumen de control es cíclico, pero permanente en promedio. El único torque que se considera es el del eje, T_{shaft} . Este torque es proporcionado por un motor. Se asume que los flujos de entrada y salida están representados por velocidades y propiedades de flujo uniformemente distribuidas. Como lo que se busca es la potencia del eje, se puede utilizar la ecuación 1.

$$\dot{W}_{shaft} = (-\dot{m}_1)(\pm U_1 V_{\theta 1}) + \dot{m}_2(\pm U_2 V_{\theta 2}) \quad (1)$$

Además, como V_1 es radial, $V_{\theta 1} = 0$. Para calcular la potencia del ventilador es necesario conocer el flujo másico, \dot{m} , la velocidad del rotor en el punto de salida del álabe, U_2 , y la velocidad tangencial del fluido a la salida del álabe, $V_{\theta 2}$. El flujo másico se obtiene fácilmente a partir de la ecuación 2:

$$\dot{m} = \rho Q = \frac{(2,38 \cdot 10^{-3} \text{ [slug/ft}^3\text{)})(230 \text{ [ft}^3/\text{min]})}{(60 \text{ [s/min]})} = 0,00912 \text{ [slug/s]} \quad (2)$$

La velocidad del rotor en el punto de salida el álabe es:

$$U_2 = r_2 \omega = \frac{(6 \text{ [in]})(1725 \text{ rpm})(2\pi \text{ [rad/rev]})}{(12 \text{ [in/ft]})(60 \text{ [s/min]})} = 90,3 \text{ [ft/s]} \quad (3)$$

Para determinar la velocidad tangencial del fluido a la salida del rotor del ventilador, $V_{\theta 2}$, se usa la ecuación 4:

$$V = W + U \Rightarrow V_2 = W_2 + U_2 \quad (4)$$

La suma de vectores de la ecuación 4 se ve en el triángulo de velocidades de la figura 3b. De dicha figura, se puede ver que:

$$V_{\theta 2} = U_2 - W_2 \cos(30^\circ) \quad (5)$$

Para resolver la ecuación 5 para $V_{\theta 2}$, se necesita un valor para W_2 (el valor de U_2 ya se determinó). Para obtener W_2 se puede notar en el triángulo de velocidades que:

$$W_2 \sin(30^\circ) = W_{R2} = V_{R2} \quad (6)$$

Donde V_{R2} es la componente radial de V y W_{R2} es la componente radial de W (y ambas cantidades son iguales). Además:

$$\dot{m} = \rho A_2 V_{R2} = \rho 2\pi r_2 h V_{R2} \quad (7)$$

Donde h es la altura del álabe. Combinando las ecuaciones 6 y 7 se obtiene:

$$W_2 = \frac{\dot{m}}{\rho 2\pi r_2 h \sin(30^\circ)} \quad (8)$$

Sustituyendo los valores conocidos en la ecuación 8 se obtiene

$$W_2 = \frac{(0,00912 \text{ [slug/s]})(12 \text{ [in/ft]})(12 \text{ [in/ft]})}{(2,38 \cdot 10^{-3} \text{ [slug/ft}^3\text{]})2\pi(6 \text{ [in]})(1 \text{ [in]})\sin(30^\circ)} = 29,3 \text{ [ft/s]}$$

Reemplazando este valor de W_2 en la ecuación 5 se obtiene:

$$V_{\theta 2} = U_2 - W_2 \cos(30^\circ) = 90,3 \text{ [ft/s]} - (29,3 \text{ [ft/s]})(0,866) = 64,9 \text{ [ft/s]}$$

Luego se puede utilizar la ecuación 1 para obtener

$$\dot{W}_{shaft} = \dot{m}U_2V_{\theta 2} = \frac{(0,00912 \text{ [slug/s]})(90,3 \text{ [ft/s]})(64,9 \text{ [ft/s]})}{1 \text{ [(slug} \cdot \text{ft/s}^2\text{)]/lb}(550 \text{ [(ft} \cdot \text{lb)/(hp} \cdot \text{s)]})} = 0,0972 \text{ [hp]}$$

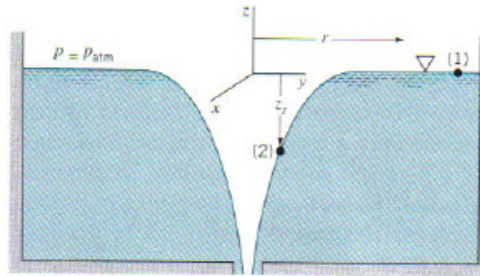
Nótese que se utilizó el signo positivo en el producto $U_2V_{\theta 2}$ ya que ambas velocidades van en la misma dirección. El resultado encontrado, 0.0972 [hp] es la potencia que debe ser entregada al eje del ventilador para las condiciones dadas. Idealmente, toda esta potencia iría al flujo de aire; sin embargo, debido a la fricción del fluido, solo una parte de esta potencia producirá un efecto útil en el aire (por ejemplo, aumentar la presión). La cantidad de potencia útil dependerá de la eficiencia en la transmisión de potencia entre los álabes del ventilador y el fluido.

Problema 4

Un líquido se drena desde un gran tanque a través de una pequeña apertura como se ve en la figura. Se forma un vórtice cuya distribución de velocidades lejos de la apertura puede ser aproximada por un vórtice libre, con un potencial de velocidad

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \theta$$

Determine una expresión que relacione la forma de la superficie con la fuerza del vórtice especificada mediante la circulación Γ .



Solución:

Dado que el vórtice libre representa un campo de flujo irrotacional, la ecuación de Bernoulli

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

puede ser escrita entre dos puntos cualesquiera. Si los puntos se seleccionan en la superficie libre, $p_1 = p_2 = 0$, entonces

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} + z_s \quad (*)$$

donde la altura de la superficie libre, z_s se mide en referencia al punto (1) (ver figura del problema).

La velocidad está dada por la ecuación

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Se puede notar que lejos del origen, en el punto (1), $V_1 = v_\theta \approx 0$, con lo que la ecuación (*) queda como

$$z_s = -\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2 g}$$

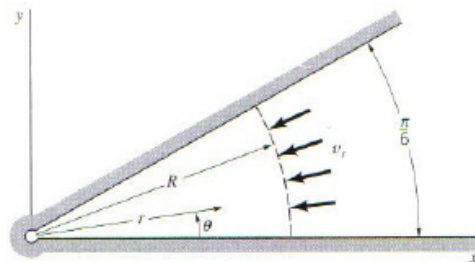
que es la ecuación deseada para el perfil de la superficie. El signo negativo indica que la superficie cae al aproximarse al origen, como se ve en la figura del problema. Esta solución no es válida muy cerca del origen, ya que la velocidad predecida se hace demasiado grande en dicha zona.

Problema 5

Un fluido no viscoso e incompresible fluye entre las dos paredes de la figura hacia una pequeña apertura. El potencial de velocidad (en $[ft^2/s]$) que describe aproximadamente este flujo es:

$$\phi = -2 \cdot \ln r$$

Determine el caudal volumétrico de flujo (por unidad de largo) hacia la apertura.



Solución:

Las componentes de la velocidad son:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{2}{r}$$
$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

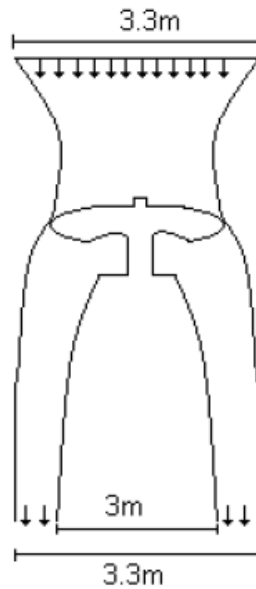
lo que indica que el flujo es netamente radial. El caudal por unidad de espesor, q , a través del arco de largo $R\pi/6$ puede ser obtenido entonces integrando la expresión

$$q = \int_0^{\pi/6} v_r R d\theta = - \int_0^{\pi/6} \frac{2}{R} R d\theta = -\frac{\pi}{3} = -1,05 [ft^2/s]$$

Nótese que el radio R es arbitrario, ya que el flujo a través de cualquier curva entre las dos paredes debe ser el mismo. El signo negativo indica que el flujo va hacia la apertura, es decir, en sentido negativo de la dirección radial.

Problema 6

La masa total de una aeronave tipo helicóptero que se muestra en la figura es 1500kg. La presión del aire en la salida es la atmosférica. Asuma que el flujo es estable y unidimensional. Trate el aire como un fluido incompresible ($\rho = 1,22 kg/m^3$), y calcule, para una posición en vuelo, la velocidad del aire que sale de la nave.



Solución:

Se asume presión atmosférica a la salida del volumen de control que se muestra en la figura y un flujo estacionario e incompresible.

Las ecuaciones básicas, considerando régimen estacionario, son:

$$0 = \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$\sum \vec{F} = \int_{SC} w \rho \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Por continuidad se tiene:

$$0 = -|\rho v_1 A_1| + |\rho v_2 A_2|$$

De donde:

$$V_1 = V_2 \left(\frac{A_2}{A_1} \right)$$

Con:

$$A_1 = \frac{\pi}{4} D_0^2 = 8,55 [m^2]$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} (D_0^2 - D_2^2) = 1,48 [m^2]$$

Para la ecuación de momentum se tiene:

$$-p_1 A_1 - Mg = w_1 (-|\rho v_1 A_1|) + w_2 (|\rho v_2 A_2|)$$

Con:

$$w_1 = -v_1 \quad w_2 = -v_2 \quad \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$$

Entonces:

$$-p_1 A_1 - Mg = v_1 \rho v_1 A_1 - v_2 \rho v_2 A_2$$

Ahora para determinar la presión en el punto (1), se considera una línea de corriente lejos del lugar, con presión atmosférica y se desprecia la diferencia de altura y la velocidad en el punto lejano, con lo que se tiene:

$$p_{atm} + 0,5 \rho v_0^2 + \rho g z_0 = p_1 + 0,5 \rho v_1^2 + \rho g z_1 \Rightarrow p_1 = p_{atm} - 0,5 \rho v_1^2$$

Usando continuidad se tiene que:

$$p_1 A_1 = (p_{atm} - 0,5 \rho v_1^2) A_1 = (p_{atm} - 0,5 \rho v_2^2 \frac{A_2^2}{A_1^2}) A_1$$

Sustituyendo esto último en la ecuación de momentum y utilizando continuidad se tiene:

$$-(p_{atm} - 0,5 \rho v_2^2 \frac{A_2^2}{A_1^2}) A_1 - Mg = -\rho v_2^2 A_2 (1 - A_2/A_1)$$

Despejando v_2 :

$$v_2 = \sqrt{\frac{Mg + p_{atm} A_1}{\rho A_2 \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right)}}$$

