CÁLCULO ESTOCÁSTICO – MA54G
PAUTA CONTROL 2

PROFESOR: JAIME SAN MARTÍN – AUXILIAR: MAURICIO DUARTE

Problema 1.

(1) Como $h \in L^2([0,1])$ se tiene que está en $\bar{S}$ y luego $X_t = \int_0^t h(s)dB_s$ es martingala. Su variación cuadrática es:

$$[X]_t = \int_0^t h(s)^2 ds.$$

La martingala exponencial asociada es $Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}[X]_t\right)$. Por Ito, para $f(x) = e^x$:

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_0 + \int_0^t Z_s d(X_s - \frac{1}{2}[X]_s) + \frac{1}{2}\int_0^t Z_s d[X - \frac{1}{2}[X]]_s \\ &= 1 + \int_0^t Z_s dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t Z_s d[X]_s + \frac{1}{2}\int_0^t Z_s d[X]_s \\ &= 1 + \int_0^t Z_s dX_s \\ &= 1 + \int_0^t Z_s h(s) dB_s \end{aligned}$$

De aquí, si $Y = e^{\int_0^1 h(s)dB_s}$, entonces, $Z_1 \in \mathcal{H}$, y como $Y = ZC_h$, donde $C_h = e^{\frac{1}{2}\int_0^1 h(s)^2 ds}$ es constante, también se tiene $Y \in \mathcal{H}$.

(2) Supongamos que $F^n = \mathbb{E}(F^n) + \int_0^1 H_s^n dB_s$ converge a F en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_1, \mu)$. Como μ es de probabilidad, también hay convergencia L^1 y luego $\mathbb{E}(F^n) \to \mathbb{E}(F)$ por lo que SPG $\mathbb{E}(F^n) = 0$. Además, como L^2 es completo, F^n, es de Cauchy y luego:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_0^1 (H_s^n - H_s^m)^2 ds\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^1 (H_s^n - H_s^m) dB_s\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(F^n - F^m\right)^2 \to 0 \end{aligned}$$

por lo que $(H_\cdot^n)$ es de Cauchy en $L^2(d\mu \times ds)$ que es completo así que $H_\cdot^n \to H_\cdot$ en $L^2(d\mu \times ds)$. Usando nuevamente la isometría se concluye que

$$F = \mathbb{E}(F) + \int_0^1 H_s dB_s.$$

(3) La primera igualdad se tiene escogiendo $h(s) = \sum_j z_j \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}$. Como $F(z_1)$ es analítica y tiene ceros no aislados en cada número real se deduce que es constante igual a cero en $\mathbb{C}$. De igual manera se prueba lo anterior para $z_2, \ldots, z_n$, por lo que tomando $z_k = iw_k$ se tiene

$$\mathbb{E}\left(Y e^{i\sum_j w_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})}\right) = 0$$

Como $\mu(A) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{M_n \in A})$ con $M_n = (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$, llamando $f = \sum_k a_k \mathbb{1}_{A_k}$ con a_k reales y A_k disjuntos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mu(dx) &= \sum_k a_k \mu(A_k) \\
&= \sum_k a_k \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{\{M_n \in A_k\}}) \\
&= \mathbb{E}(Y \sum_k a_k \mathbb{1}_{\{M_n \in A_k\}}) \\
&= \mathbb{E}(Y \sum_k a_k \mathbb{1}_{A_k}(M_n)) \\
&= \mathbb{E}(Y f(M_n))
\end{aligned}$$

Por argumentos clásicos se deduce que para $f \in L^2$ se tiene que la igualdad $\int_{\mathbb{R}^n} f du = \mathbb{E}(Yf(M_n))$ es satisfecha. Así:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_k z_k x_k} \mu(dx) = \mathbb{E}(Y e^{i\sum_k z_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})}) = 0.$$

Como la función característica de μ es cero, entonces $\mu \equiv 0$. De esta manera, para todo n, para toda función medible L^2, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Refinando la partición $\mathcal{P} :\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, por convergencia L^2 se tiene que $\mathbb{E}(Yf(B)) = 0$ para toda función $f : \mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, donde B es un proceso Browniano estándar, pero como Y es $\mathcal{F}_1$ medible la única opción es $Y \equiv 0$, luego $\varepsilon^{\perp} = \{0\}$ y por (1), $\mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$.

Como $\mathcal{H}$ es cerrado se deduce que $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbb{P})$.

Problema 2.

(1) Sea $Y_t = B_t - (1-t)\int_0^t \frac{B_u}{(1-u)^2} du$. Por una parte:

$$\begin{aligned}
B_t - \int_0^t \frac{Y_s}{1-s} ds &= B_t - \int_0^t \frac{B_u}{1-u} du + \int_0^t \int_0^s \frac{B_u}{(1-u)^2} du ds \\
&= B_t - \int_0^t \frac{B_u}{1-u} du + \int_0^t \int_u^t \frac{B_u}{(1-u)^2} ds du \\
&= B_t - \int_0^t \frac{B_u}{(1-u)^2}(1-u) du + \int_0^t \frac{B_u}{(1-u)^2}(t-u) du \\
&= B_t - \int_0^t \frac{B_u}{(1-u)^2}(1-u+u-t) du \\
&= B_t - (1-t)\int_0^t \frac{B_u}{(1-u)^2} du
\end{aligned}$$

Donde en la segunda igualdad se usa Fubini dado que las trayectorias brownianas son continuas y luego acotadas en $[0,1]$. Tenemos así que $Y_t = B_t - \int_0^t \frac{Y_s}{1-s} ds$. Usando Ito con $f(x) = x$ se deduce directamente que $dY_t = dB_t - \frac{Y_s}{1-s} ds$ pues las variaciones cuadráticas integran $f''(x) = 0$.

(2) Tenemos la ecuación estocástica $dY_t = dB_t - \frac{Y_t}{1-t} dt$. Buscamos condiciones tipo Lipschitz. Tomamos $F_t(x) = \frac{x}{1-t}$. En $[0, t_0]$ se tiene que:

$$|F_t(x) - F_t(y)| = \frac{|x-y|}{1-t} \leq \frac{1}{1-t_0} |x-y|.$$

Donde se nota lo importante que $t_0 < 1$. Por teorema de existencia y unicidad hay solución única de la ecuación en $[0, t_0]$.

Si Z_t es otra solución de (1) en el intervalo $[0,1)$, entonces restringida a $[0,t_0]$ es solución de (1) en ese intervalo y luego $Y_t = Z_t \ \forall \ t \in [0,t_0]$, por lo cual se deduce que para todo $t \in [0,1)$, $Y_t = Z_t$ c.s. y como Y_t es continua se deduce que c.s., para todo $t \in [0,1)$, $Y_t = Z_t$.

(3) Calculando y por Fubini:

$$\mathbb{E}\left(Y_t\right) = \mathbb{E}\left(B_t - (1-t)\int_0^t \frac{B_u}{(1-u)^2}du\right) = -(1-t)\int_0^t \frac{\mathbb{E}(B_u)}{(1-u)^2}du = 0$$

Por Ito, para $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} Y_t^2 &= 2\int_0^t Y_s dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2d[Y]_s \\ &= 2\int_0^t Y_s dB_s - 2\int_0^t \frac{Y_s^2}{1-s}ds + [Y]_t \end{aligned}$$

Como Y_t es solución de la ec. estocástica, es integrable y luego $\mathbb{E}\left(\int_0^t Y_s dB_s\right) = 0$ por la propiedad de martingala. Calculemos la variación cuadrática de Y:

$$[Y]_t = t + (1-t)^2\left[\int_0^{\cdot} \frac{B_u}{(1-u)^2}du\right]_t - 2(1-t)\left[B, \int_0^{\cdot} \frac{B_u}{(1-u)^2}du\right]_t$$

Como la integral du es de variación finita y continua, y B_t es continuo, los dos corchetes de arriba valen cero, luego $[Y]_t = t$. Por lo tanto:

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = t - 2\int_0^t \frac{\mathbb{E}(Y_s^2)}{1-s}ds$$

Si llamamos $\varphi(t) = \mathbb{E}(Y_t^2)$, tenemos que φ satisface la ecuación diferencial siguiente:

$$\varphi'(t) = 1 - 2\frac{\varphi(t)}{1-t} \qquad\qquad \varphi(0) = 0$$

Una solución particular es $\varphi(t) = 1-t$. Veamos la homogénea:

$$\varphi_H'(t) = -2\frac{\varphi_H(t)}{1-t}$$

que es una ecuación separable:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log|\varphi_H(t)| = -\frac{2}{1-t} \Rightarrow \log\varphi_H(t) = C + 2\log(1-t) \Rightarrow |\varphi_H(t)| = e^C(1-t)^2$$

Queda finalmente $\varphi_H(t) = A(1-t)^2$, por continuidad de la solución. De esta manera la solución general es $\varphi(t) = 1-t+A(1-t)^2$, por lo que imponiendo $\varphi(0) = 0$ obtenemos $A = -1$ y la solución:

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = t(1-t).$$

De aquí es claro que $\lim\limits_{t\uparrow 1} Y_t = 0$ en L^2.