

CÁLCULO ESTOCÁSTICO – MA54G

TAREA $\mathbb{1}_{\{B_t \geq 0\}}$ + GUIA $\mathbb{1}_{\{B_t \leq 0\}}$

PROFESOR: JAIME SAN MARTÍN – AUXILIAR: MAURICIO DUARTE

Consideramos el espacio medible (Ω, \mathcal{B}) y un movimiento Browniano real $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ con su filtración natural asociada.

Problema 1.

- (1) Para t y s fijos, encuentre la función de distribución de la variable aleatoria $X = B_t + B_s$.
- (2) Encuentre todas las funciones deterministas $\phi(t)$ tales que $e^{B_t + \phi(t)}$ es un movimiento Browniano.
- (3) Pruebe que si $0 < s \leq t \leq u \leq v$, entonces las variables aleatorias $\frac{1}{t}B_t - \frac{1}{s}B_s$ y $aB_u + bB_v$ son independientes para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$.
- (4) Muestre que $X_t = e^{B_t} - 1 - \frac{1}{2} \int_0^t e^{B_s} ds$ es martingalas.

Problema 2. Sean $B_1(t)$ y $B_2(t)$ dos movimientos Brownianos independientes, y sea $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ una partición (ordenada) del intervalo $[a, b]$. Muestre que

$$\sum_{i=1}^n (B_1(t_i) - B_1(t_{i-1})) (B_2(t_i) - B_2(t_{i-1})) \rightarrow 0$$

en $L^2(\Omega)$ cuando $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ tiende a cero.

Problema 3. Pruebe que el mB tiene una escala natural, es decir:

$$\mathbb{P}_x [T_b < T_a] = \frac{x - a}{b - a}$$

para $x \in (a, b)$, donde T_y es el tiempo de llegada a y .

Concluya que si $T = \inf \{t > 0 : B_t \notin (a, b)\}$, entonces $\mathbb{E}_x(T) = (x - a)(b - x)$.

Problema 4. Sea B un movimiento Browniano estándar.

- (1) Pruebe que la probabilidad de que un número real fijo, x , sea un extremo local de $t \mapsto B_t$ es cero.
- (2) Para cada número real positivo, r , pruebe que

$$\mathbb{P} \{ \omega : S_r(\omega) \text{ es un extremo local de } t \mapsto B_t, t > r \} = 0.$$

Recordar que $S_r = \max_{0 \leq t \leq r} B_t$.

- (3) Pruebe de lo anterior que casi seguramente, las trayectorias Brownianas no tienen dos extremos locales iguales. En particular, para cada r , existe casi seguramente a lo más un $s < r$ tal que $B_s = S_r$.
- (4) Muestre que el conjunto de extremos locales de la trayectoria Browniana es casi seguramente numerable.