

## Tarea 1 Análisis numérico de las EDP

Estudiar el problema de Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ en } \Omega$$

con la siguiente condición de borde:

- $u=1$  en  $\Gamma_1$
- $u=0$  en  $\Gamma_3$
- $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  en  $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$

y en donde  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ , el borde de  $\Omega$ , está dado por:

- $\Gamma_1$  es la línea poligonal definida por  $\{(0,0), (0.5-d,0), (0.5,d), (0.5,0), (1,0)\}$  ( $d$  es algún valor pequeño, por ejemplo  $d = 0.1$ ).
- $\Gamma_2 = [(1,0), (1,1)]$
- $\Gamma_3 = [(1,1), (0,1)]$
- $\Gamma_4 = [(0,1), (0,0)]$

Preguntas

- (1) Escribir la forma variacional de este problema. Verifique que estamos en un caso de aplicación de Lax-Milgram.
- (2) Descomponga el cuadrado en sub-cuadrados  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  y luego, cada uno de estos en dos triángulos, dividiéndolo por la diagonal  $[(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})]$ . Describa la triangulación resultante, y explique como asegurar que permite triangular  $\Omega$  en forma exacta.
- (3) Sea  $\varphi_i$  la función de base, polinomio de grado 1 por pedazos, continua y que vale 1 en el nodo  $i$ -ésimo (de la triangulación) y cero en el resto de los nodos. Calcule,  $A(i, j, T) = \int_T \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j$  para cada posible triángulo  $T$  de la triangulación y cada par de nodos  $(i, j)$ .
- (4) Escriba el problema matricial, utilizando lo anterior, que se debe resolver para aproximar la solución del problema, utilizando el método de elementos finitos. En particular, escriba como se calculará la matriz del sistema. Debe proponer una alternativa que asegure que el sistema a resolver sea simétrico, definido positivo y fácil de escribir.

Entregar hasta el día viernes 25 de agosto (email a rgormaz@dim.uchile.cl)