

Problèmes variationnels

Résumé du cours de MEDP

Maîtrise de mathématiques 2001 – 2002

medp-variat.tex (2001dec01)

Sauf mention explicite du contraire, toutes les fonctions considérées seront à valeurs réelles.

1 Méthodologie

On suppose que l'on a une solution classique u , c'est à dire une fonction u de classe C^2 jusqu'au bord, qui vérifie l'équation indiquée dans Ω et les conditions au bord sur $\partial\Omega$. On traite alors les points suivants (éventuellement avec des variantes adaptées au problème considéré).

1. Multiplication de l'équation par une fonction v et intégration par partie (formelle). L'objectif est d'écrire l'équation sous une forme adaptée à l'application du lemme de Lax – Milgram.
2. Prise en compte des conditions aux limites. Identification de l'espace de Hilbert H à considérer.
3. Identification de la forme bilinéaire et de la forme linéaire sur H .
4. Vérification des propriétés requises : continuité et coercivité de la forme bilinéaire, continuité de la forme linéaire sur H .
5. Application du lemme de Lax – Milgram dans H .
6. Retour au problème initial : formulation faible de l'équation, prise en compte des conditions aux limites (si c'est possible).
7. Hypothèses supplémentaires sur la solution variationnelle (ou application de résultats de régularité) et retour au problème initial.

Cette méthodologie sera appliquée dans chacun des problèmes aux limites ci-dessous (les détails ne seront donnés que pour le problème de Dirichlet et pour le problème de Neumann homogènes).

2 Problème de Dirichlet homogène

On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné assez régulier. On se donne

$$(1) \quad \begin{cases} q : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} & \text{continue,} \\ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Une hypothèse complémentaire sera faite sur la fonction q .

On se propose de trouver une solution du problème

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Application de la méthode ci-dessus

1) La multiplication de l'équation par v et l'intégration par parties donnent

$$\int_{\Omega} \langle du, dv \rangle + \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} + \int_{\Omega} quv = \int_{\Omega} fv.$$

2) On choisit une fonction v qui s'annule sur le bord. Deux raisons à cela : d'une part u doit s'annuler sur le bord et, d'autre part, cela fait disparaître dans l'équation précédente l'intégrale sur le bord qui contient la dérivée normale de u , sur laquelle nous n'avons aucune information. Le minimum requis pour que la formule précédente fasse sens et pour prendre en compte l'annulation de v et u sur le bord est de choisir $H = H_0^1(\Omega)$.

3) On identifie facilement la forme bilinéaire et la forme linéaire, à savoir,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\langle du, dv \rangle + quv), \quad L(v) = \int_{\Omega} fv.$$

4) Il est clair que a est bilinéaire symétrique et que L est linéaire. La continuité de a et de L résulte immédiatement des hypothèses $q \in C^0(\overline{\Omega})$ et $f \in L^2(\Omega)$. Pour la coercivité, il faut une hypothèse supplémentaire sur q . Le plus simple est de supposer que q est strictement positive dans $\overline{\Omega}$. L'inégalité de Poincaré permet en fait de supposer simplement que $q(x) > -A(\Omega)$ dans $\overline{\Omega}$, où $A(\Omega)$ est une constante strictement positive qui dépend de l'ouvert Ω (et qui est donnée par l'inégalité de Poincaré elle-même). On peut en fait analyser cette constante comme étant la plus petite valeur propre du Laplacien pour le problème de Dirichlet dans Ω .

5) L'application du Lemme de Lax – Milgram permet de montrer qu'il existe une et une seule fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} (\langle du, dv \rangle + quv) = \int_{\Omega} fv.$$

6) Dans le cas particulier qui nous intéresse ici, la fonction u vérifie la condition d'annulation sur le bord *au sens des traces*, $\gamma_0(u) = 0$.

Par ailleurs, l'égalité précédente est vraie pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. On en déduit alors (puisque q est continue et u dans L^2) que Δu existe au sens faible dans L^2 et que l'on a

$$-\Delta u + qu = f \quad \text{au sens faible dans } L^2(\Omega).$$

7) Si on suppose que la fonction u est dans $C^2(\overline{\Omega})$, on déduit des propriétés de $H_0^1(\Omega)$ et de l'unicité de la dérivée faible que la fonction u est bien une solution classique.

3 Problème de Neumann homogène

On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné assez régulier. On note ν la normale unitaire intérieure à Ω . On se donne

$$(3) \quad \begin{cases} q : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} & \text{continue,} \\ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Une hypothèse complémentaire sera faite sur la fonction q .

On se propose de trouver une solution du problème

$$(4) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Application de la méthode ci-dessus

1) La multiplication de l'équation par v et l'intégration par parties donnent

$$\int_{\Omega} \langle du, dv \rangle + \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} + \int_{\Omega} quv = \int_{\Omega} fv.$$

2) La dérivée normale de u sur le bord étant supposée nulle, le terme de bord issu de l'intégration par parties disparaît. Le minimum requis pour que la formule précédente fasse sens (une fois supprimé l'intégrale sur le bord) est de choisir $H = H^1(\Omega)$. Ce choix ne permet pas d'écrire que les fonctions considérées vérifient $\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ sur le bord. En effet, la dérivée normale est une combinaison linéaire des dérivées premières de v , qui sont dans L^2 et pas plus a priori. Il est donc impossible de fixer une valeur sur $\partial\Omega$ qui est de mesure nulle. Nous verrons ré-apparaître la condition $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ ultérieurement. Nous dirons que c'est une condition au bord *naturelle*, ausens où elle est imposée par la formulation variationnelle. L'interprétation physique est que le choix $H = H^1(\Omega)$ signifie que le système est isolé, d'où l'absence d'échanges avec l'extérieur et l'annulation de la dérivée normale.

3) On identifie facilement la forme bilinéaire et la forme linéaire, à savoir,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\langle du, dv \rangle + quv), \quad L(v) = \int_{\Omega} fv.$$

4) Il est clair que a est bilinéaire symétrique et que L est linéaire. La continuité de a et de L résulte immédiatement des hypothèses $q \in C^0(\bar{\Omega})$ et $f \in L^2(\Omega)$. Pour la coercivité, il faut une hypothèse supplémentaire sur q . Le plus simple est de supposer que q est strictement positive dans $\bar{\Omega}$. C'est une hypothèse raisonnable au sens où a n'est pas coercive sur $H^1(\Omega)$ quand $q \equiv 0$ dans Ω (prendre une fonction constante).

5) L'application du Lemme de Lax – Milgram permet de montrer qu'il existe une et une seule fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que, pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} (\langle du, dv \rangle + quv) = \int_{\Omega} fv.$$

6) Dans le cas particulier qui nous intéresse ici, on ne peut rien dire a priori sur la dérivée normale de la fonction u .

Par ailleurs, l'égalité précédente est vraie en particulier pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. On en déduit alors (puisque q est continue et u dans L^2) que Δu existe au sens faible dans L^2 et que l'on a

$$-\Delta u + qu = f \quad \text{au sens faible dans } L^2(\Omega).$$

7) Si on suppose que la fonction u est dans $C^2(\overline{\Omega})$, on déduit des propriétés de $H^1(\Omega)$ et de l'unicité de la dérivée faible que la fonction u est bien une solution classique de l'équation $-\Delta u + qu = f$.

Prenant maintenant une fonction $v \in C^\infty(\Omega)$ et intégrant par parties l'équation

$$\int_{\Omega} (\langle du, dv \rangle + quv) = \int_{\Omega} f v,$$

on trouve

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + qu)v - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_{\Omega} f v.$$

Il résulte du point (6) que l'on a nécessairement

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

pour toute $v \in C^\infty(\Omega)$ et on peut montrer que l'on a alors nécessairement

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0.$$

La fonction u est donc bien alors une solution classique du problème de Neumann homogène dans Ω . On remarquera que ce qui précède vaut également dès que $u \in H^2(\Omega)$, si l'on interprète la dérivée normale au sens des traces.

4 Problème mixte homogène

On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné assez régulier. On note ν la normale unitaire intérieure à Ω . On suppose également que l'on a une partition non triviale de $\partial\Omega$ en sous-ensembles réguliers $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. On se donne

$$(5) \quad \begin{cases} q : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} & \text{continue,} \\ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Une hypothèse complémentaire sera faite sur la fonction q .

On se propose de trouver une solution du problème

$$(6) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

5 Problème de Dirichlet non homogène

On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné assez régulier. On se donne

$$(7) \quad \begin{cases} q : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} & \text{continue,} \\ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \text{dans } L^2(\Omega), \\ g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}. \end{cases}$$

Des hypothèses complémentaires seront faites sur les fonctions q et g .

On se propose de trouver une solution du problème

$$(8) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

6 Problème de Neumann non homogène

On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné assez régulier. On note ν la normale unitaire intérieure à Ω . On se donne

$$(9) \quad \begin{cases} q : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} & \text{continue,} \\ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \text{dans } L^2(\Omega), \\ g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}. \end{cases}$$

Des hypothèses complémentaires seront faites sur les fonctions q et g .

On se propose de trouver une solution du problème

$$(10) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

7 Problème mixte non homogène

On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné assez régulier. On note ν la normale unitaire intérieure à Ω . On suppose également que l'on a une partition non triviale de $\partial\Omega$ en sous-ensembles réguliers $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. On se donne

$$(11) \quad \begin{cases} q : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} & \text{continue,} \\ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \text{dans } L^2(\Omega), \\ g, h : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}. \end{cases}$$

Des hypothèses complémentaires seront faites sur les fonctions q, g et h .

On se propose de trouver une solution du problème

$$(12) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = g & \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = h & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

8 Généralisations

Plus généralement, on peut considérer les problèmes ci-dessus avec un opérateur sous-forme de divergence

$$A = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}) + a_0(x)$$

où les fonctions a_0 et a_{jk} , $1 \leq j, k \leq n$ sont supposées assez régulières. Des hypothèses sont alors faites sur la matrice $(a_{jk}(x))$ et la normale ν est remplacée par le champ de vecteurs $\nu_A = (\sum_{j=1}^n a_{1j}\nu_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}\nu_j)$ le long de $\partial\Omega$.

Références

- [1] Brezis, Haïm. — Analyse fonctionnelle. Théorie et Applications, Masson 1973
- [2] Gilbarg, David – Trudinger, Neil S. — Elliptic partial differential equations of second order, Grundlehren 224, Springer 1983
- [3] Raviart, Pierre-Arnaud – Thomas, Jean-Marie. — Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson 1983

Pierre Bérard

Institut Fourier

UMR 5582 UJF – CNRS

Pierre.Berard@ujf-grenoble.fr

www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/notes_cours.html