

Tarea 3, MA46B 2005/2
Prof. Salomé Martínez
Prof. Aux. André De Laire, Hernán Castro y Claudio Muñoz

1. Considerando funciones de la forma $r^a(\log r)^b$, con $r = |x|$, para x cerca de 0, demuestre que $H^1(\mathbb{R}^2)$ no está contenido en $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.
2. a) Demuestre que existen $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\delta = (1 - \Delta)^k f.$$

- b) Demuestre que existen $m \in \mathbb{N}$ y funciones $f_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)'$, con $|\alpha| \leq m$, tal que

$$\delta = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha.$$

3. Problema 4 pág. 133.

4. Sea u es la solución de la ecuación de ondas

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad u(x, 0) = f, \quad u_t(x, 0) = g.$$

Demuestre que

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 \leq C(\|g\|_{H^{s-1}}^2 + \|f\|_{H^s}^2 + |t| \|g\|_{H^{s-1}}^2).$$

5. Para $m \in \mathbb{N}$ demuestre que la definición de $H^m(\mathbb{R}^N)$ usando transformada de Fourier o derivadas débiles coinciden. Pruebe que en $H^m(\mathbb{R}^N)$ la norma usando transformada de Fourier, es decir

$$\|u\|_m = \|(1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

es equivalente a la norma $|u| = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

6. Problemas 7 y 8 pág. 160 y 161.
7. Considere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ dominio acotado y $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ solución clásica de la ecuación de *Ginzburg-Landau*:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u + (1 - |u|^2)u &= 0, & \text{en } \Omega \\ |u| &= 1, & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \right\} (GL).$$

Pruebe que $|u| \leq 1$ en Ω .

Indicación: Considere $w = |u|^2$.

8. Sean $p > 1$, $\alpha > 0$, $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $V(x) \geq \alpha$ y $\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) > 0$. Considere el problema no lineal para las soluciones estacionarias en la ecuación de Schrödinger con potencial V en \mathbb{R}^N :

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) + V(x)u(x) - u(x)^p &= 0, \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N), \\ u(x) &> 0, \end{aligned} \right\} (P).$$

- a) Demuestre que si (P) tiene solución, entonces existen $M > 0$, $c > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $u(x) \leq M e^{-cx}$.
- b) Suponga ahora además que existen $R, L, d > 0$ tales que $\forall |x| \geq R$, $V(x) \leq M |x|^d$. Concluya que entonces (P) no posee solución.

Indicación: Multiplique por $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e integre por partes.