

Tarea 3 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

Espacios Vectoriales Topológicos

La noción de espacio topológico generaliza al máximo los espacios vectoriales normados, tanto así, que no se considera estructura algebraica alguna. En esta tarea nos interesa estudiar los *espacios vectoriales topológicos*, que generalizan a los e.v.n. sin dejar de lado la estructura de espacio vectorial.

Definición. Dado un espacio vectorial X sobre \mathbb{R} y \mathcal{O} una topología sobre X , decimos que (X, \mathcal{O}) es un *espacio vectorial topológico* (abreviado *e.v.t.*) si la topología es compatible con la estructura algebraica de X , es decir, si las aplicaciones

$$\begin{aligned} + & : X \times X \longrightarrow X \\ & (x, y) \longmapsto x + y \\ \cdot & : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X \\ & (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

son continuas, donde en $X \times X$ y en $\mathbb{R} \times X$ se consideran las topologías producto respectivas.

Claramente todo e.v.n. es un e.v.t. Ejemplo de un e.v.t. cuya topología no está generada por norma alguna es $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto.

Teorema 1. Si $(X_i)_{i \in I}$ es una familia de e.v.t.'s, entonces $\prod_{i \in I} X_i$ con la topología producto es un e.v.t.

Teorema 2. Si X es un e.v.t. e Y es un sub-espacio vectorial de X , entonces X/Y con la topología cociente es un e.v.t.

Suplementariedad Topológica

Recordemos que dado un e.v. X , dos sub-espacios X_1, X_2 se dicen *suplementarios* si la aplicación $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mapsto x_1 + x_2 \in X$ es biyección.

Definición. Dado un e.v.t. X y dos sub-espacios X_1, X_2 , ellos se dicen *suplementarios topológicos* si son suplementarios y si la aplicación $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mapsto x_1 + x_2 \in X$ es un homeomorfismo.

Si bien todo sub-espacio admite un suplementario, no todo sub-espacio admite un suplementario topológico. Se prueba fácilmente que una condición necesaria para que dos sub-espacios suplementarios sean suplementarios topológicos es que ellos sean cerrados, mas no es una condición suficiente.

Dado X e.v. y dos sub-espacios suplementarios X_1, X_2 , sabemos que todo $x \in X$ se descompone de manera única como $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$. Esto define funciones $p_1 : X \rightarrow X_1$ y $p_2 : X \rightarrow X_2$ mediante $p_1(x) = x_1$ y $p_2(x) = x_2$; las llamamos *proyecciones paralelas* en X_1 y X_2 respectivamente. A continuación damos dos caracterizaciones de la suplementariedad topológica.

Teorema 3. *Para que dos sub-espacios X_1, X_2 suplementarios en un e.v.t. X sean suplementarios topológicos es necesario y suficiente que la proyección paralela en X_1 sea continua.*

Teorema 4. *Para que dos sub-espacios X_1, X_2 suplementarios en un e.v.t. X sean suplementarios topológicos es necesario y suficiente que la biyección canónica $x_1 \in X_1 \mapsto x_1 + X_2 \in X/X_2$ sea un homeomorfismo.*

Propiedades de las Vecindades en un e.v.t.

Recordemos que dado un e.v. X , un conjunto $A \subset X$ se dice *equilibrado* si $\forall |\lambda| \leq 1$ se cumple $\lambda A \subset A$, y se dirá *absorbente* si $\forall x \in X, \exists \alpha > 0$ tal que $\lambda x \in A, \forall |\lambda| \leq \alpha$. El siguiente teorema nos describe las propiedades fundamentales que tienen las vecindades de un punto en un e.v.t.

Teorema 5. *Sea X un e.v.t. Denotamos por $\mathcal{V}(a)$ a la familia de vecindades de $a \in X$. Entonces se tiene:*

- (i) $\mathcal{V}(a) = a + \mathcal{V}(0)$;
- (ii) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(a)$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a)$;
- (iii) $V \in \mathcal{V}(0)$, entonces $\exists W \in \mathcal{V}(0)$ tal que $W + W \subset V$;
- (iv) $V \in \mathcal{V}(0), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $\lambda V \in \mathcal{V}(0)$;

- (v) $V \in \mathcal{V}(0)$, entonces V es absorbente;
- (vi) el origen posee una base de vecindades equilibradas.

Consecuencia de lo anterior es el siguiente teorema, que, tal como en el caso de los e.v.n.'s, nos caracteriza la continuidad de una aplicación lineal.

Teorema 6. *Una aplicación lineal de un e.v.t. X en un e.v.t. Y será continua si y sólo si es continua en el origen.*

En un e.v.t. ya no contamos con la noción de bola abierta y bola cerrada. Sin embargo, tenemos el siguiente teorema: recordemos que, en un espacio topológico, V se dice *vecindad cerrada* de x si V es un cerrado que contiene un abierto que contiene a x .

Teorema 7. *En un e.v.t. el origen posee una base de vecindades (abiertas) equilibradas y una base de vecindades cerradas equilibradas.*

Un resultado interesante en los e.v.t.'s tiene que ver con la caracterización de la continuidad de una *subnorma*.

Definición. Dado un e.v. X , decimos que una aplicación $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ es una *subnorma* si cumple:

- (i) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall \lambda \geq 0, \forall x \in X$;
- (ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X$.

Si además se tiene que $p(\lambda x) = |\lambda|p(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$, entonces decimos que p es una *seminorma*.

Teorema 8. *Dado un e.v.t. X y una subnorma p en X , son equivalentes:*

- (i) p es continua;
- (ii) $\{x \in X : p(x) < 1\}$ es abierto;
- (iii) $\{x \in X : p(x) < 1\}$ es vecindad de 0;
- (iv) $\{x \in X : p(x) \leq 1\}$ contiene una vecindad de 0;
- (v) p es continua en 0.

A continuación damos una caracterización útil de la continuidad de una aplicación lineal de un e.v.t. en \mathbb{R} .

Teorema 9. *Dado un e.v.t. X y dada u una aplicación lineal de X en \mathbb{R} , son equivalentes:*

- (i) u es continua;
- (ii) $|u|$ es continua;
- (iii) existe una seminorma continua p tal que $|u| \leq p$;
- (iv) existe una subnorma continua p tal que $|u| \leq p$.

Otro resultado interesante en los e.v.t.'s es el siguiente:

Teorema 10. *Sea X un e.v.t. Entonces el interior y la adherencia de un convexo en X son convexos.*

El Teorema de Friederich Riesz

Se sabe que todo e.v.n. en donde la bola unitaria es compacta necesariamente debe ser de dimensión finita. Este hecho tiene su generalización a e.v.t.'s. Incluimos una demostración de tan fundamental resultado.

Teorema 11 (Friederich Riesz). *Un e.v.t. localmente compacto necesariamente es de dimensión finita.*

Demostración. Sea V una vecindad compacta de 0 en un e.v.t. X . Sabemos que $2V$ es también una vecindad compacta de 0 y \mathring{V} es vecindad abierta de 0. Se tendrá entonces que $\{a + \mathring{V}\}_{a \in 2V}$ es un recubrimiento abierto de $2V$ y por lo tanto existirán $a_1, \dots, a_n \in 2V$ tales que $\{a_i + \mathring{V}\}_{i=1}^n$ recubre $2V$. Sea M el s.e.v. generado por $\{a_i\}_{i=1}^n$. M verifica evidentemente que $M + V \supset 2V$. Entonces:

$$M + V = M + M + V \supset M + 2V = 2M + 2V = 2(M + V),$$

y así sucesivamente, se prueba que $M + V \supset 2^m(M + V) = M + 2^m V$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Sin embargo, $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} 2^m V = X$, por ser V absorbente, lo cual muestra que $M + V = X$. De hecho, se tiene que $M = X$: supongamos que existe $a \in X \setminus M$. Como M es de dimensión finita, es cerrado, y

por lo tanto existirá U vecindad de 0 tal que $(a + U) \cap M = \emptyset$. Podemos suponer U equilibrada y abierta. Pero como $(a + U) \cap M = \emptyset$, tendremos equivalentemente que $a \notin M - U = M + U$. Luego, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $ka \notin k(M + U) = M + kU$. Y como $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} kU = X$, dicha unión también cubre a V , el cual es compacto, y por lo tanto existirá un número finito de conjuntos de la forma kU que recubren a V . Pero, por ser U equilibrado, dichos conjuntos son crecientes con k , luego, existirá un \bar{k} tal que $V \subset \bar{k}U$. Entonces, $M + \bar{k}U \supset M + V = X$, lo que contradice el hecho que $\bar{k}a \notin M + \bar{k}U$. Por lo tanto, debe tenerse que $X = M$, lo cual prueba que X es de dimensión finita. \square

Espacios Vectoriales Topológicos Localmente Convexos

La generalidad de los e.v.t.'s no permite obtener resultados demasiado importantes. Sin embargo, los *espacios vectoriales topológicos localmente convexos* (abreviado *e.v.t.l.c.* 's) ofrecen una estructura topológica y algebraica suficientemente rica como para que resultados tan potentes como el Teorema de Hahn-Banach sigan siendo válidos.

Definición. Un e.v.t. se dice *localmente convexo* si el origen tiene una base de vecindades convexas.

Teorema 12. Si X es un e.v.t.l.c., entonces el origen posee una base de vecindades convexas equilibradas abiertas y convexas equilibradas cerradas.

La importancia de la siguiente definición quedará justificada por los resultados posteriores.

Definición. Sea X un e.v.t. Diremos que X es un *espacio vectorial seminormado* si existe una familia *filtrante* de seminormas $(p_i)_{i \in I}$ definidas en X tal que la topología de X está generada por las semibolas, es decir, conjuntos de la forma $B_i(x, r) = \{y \in X : p_i(y - x) < r\}$, con $i \in I, x \in X, r > 0$. La familia $(p_i)_{i \in I}$ se dirá *filtrante* si $\forall J \subset I$ finito $\exists i \in I$ tal que $p_j \leq p_i, \forall j \in J$.

Ejemplo. Consideremos $X = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones continuas de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . Como \mathbb{R}^n no es compacto, el supremo de una función en X puede ser infinito y por lo tanto no define una norma. Sin embargo, para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ podemos definir $p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$, con $f \in X$. Resulta que $\{p_K : K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto}\}$ es una familia filtrante de seminormas y así X resulta un espacio vectorial seminormado.

Es directo ver que un e.v.n. es un e.v.t.l.c. También es claro que los espacios vectoriales seminormados son e.v.t.l.c.'s: las semibolas centradas en 0 forman una base de vecindades convexas del origen. Lo interesante es que se tiene el recíproco: todo e.v.t.l.c. es un espacio vectorial seminormado.

Teorema 13. *Sea X un e.v.t. Si p es una subnorma continua en X , entonces el conjunto $\Omega = \{x \in X : p(x) < 1\}$ es un abierto convexo que contiene al 0. Recíprocamente, si Ω es un abierto convexo que contiene al 0, entonces el funcional de Minkowsky $p(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in t\Omega\}$ es una subnorma continua que verifica $\Omega = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Además, si Ω es equilibrado, p será una seminorma, y recíprocamente.*

Teorema 14. *Para que un e.v.t. sea localmente convexo es necesario y suficiente que sea seminormado.*

Veamos una última noción, con su respectivo teorema.

Definición. Dado un e.v.t. X , una parte A se dirá *acotada* si para cualquier V vecindad de 0 existe un $\lambda > 0$ tal que $A \subset \lambda V$.

Teorema 15. *Para que un e.v.t. tenga una vecindad acotada del 0 es necesario y suficiente que su topología pueda definirse por una sola seminorma, y si el espacio es separado, por una norma.*

Referencias

- [1] F. Trèves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press, 1967.
- [2] J. L. Kelly, I. Namioka. *Linear Topological Spaces*. D. Van Nostrand Company, Inc., 1967.
- [3] J. Horvath. *Topological Vector Spaces and Distributions*.