

Trabajo dirigido #8 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

Problema 1. Sean X, Y espacios métricos compactos y $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Dado $\epsilon > 0$, pruebe que existen funciones continuas $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $g_i : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tales que

$$\sup_{(x,y) \in X \times Y} |f(x,y) - \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(y)| < \epsilon.$$

Problema 2. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. El objetivo de este problema es demostrar que $C(X, \mathbb{R})$ con la métrica uniforme es un espacio separable. Para ello se propone el siguiente esquema:

- (a) Pruebe que X es separable. Concluya que X posee una base numerable de vecindades.

Sea $f_i(x) = d(x, A_i^c)$ donde $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una base numerable de abiertos en X (suponemos $A_i \neq X$). Sea \mathcal{M} la familia formada por todos los monomios de la forma $m(x) = f_{i_1}(x)^{p_1} \cdots f_{i_n}(x)^{p_n}$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $i_1, \dots, i_n, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ (recuerde que $a^0 = 1 \forall a \in \mathbb{R}$).

- (b) Pruebe que \mathcal{M} es una familia numerable de funciones continuas que separa puntos.
- (c) Construya a partir de \mathcal{M} una familia numerable densa en $C(X, \mathbb{R})$ y concluya. *Indicación:* considerar combinaciones lineales de monomios.