

Teorema de Stone - Weierstrass

X e.m. compacto, A subálgebra del álgebra (de Banach) $C^0(X; \mathbb{R})$.
 Si A contiene la fn. constante 1, y separa los puntos de X ,
 entonces $\bar{A} = C^0(X; \mathbb{R})$.

En ocasiones, este teorema se encuentra formulado en los términos, equivalentes, siguientes: Sea X e.m. compacto y S un subconjunto de fns en $C^0(X; \mathbb{R})$, que separa los puntos de X . Luego, la subálgebra A_S engendrada por S y las fns. constantes es densa en $C^0(X; \mathbb{R})$.

La noción de subálgebra engendrada por S y las constantes corresponde al s.e.v. de $C^0(X; \mathbb{R})$ de todas las funciones que se escriben como polinomios con coeficientes reales (o en el cuerpo) c/c a las funciones de S , esto es, si $S = (f_i)_{i \in I}$, entonces

$$\mathcal{A}_S = \left\{ g = g_n = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha f^\alpha \mid a_\alpha \in \mathbb{R}, \alpha = (\alpha_i)_{i \in I}, f = (f_i)_{i \in I}, |\alpha| = \sum_{i \in I} \alpha_i \text{ y} \right.$$

$$\left. f^\alpha \stackrel{(\text{def})}{=} \prod_{i \in I} f_i^{\alpha_i} ; \text{ sólo se consideran } \sum_{|\alpha| \leq n} \text{ finitos} \right\}$$

Nota. Como $|\alpha| \leq n$, para cada α que interviene en la $\sum_{|\alpha| \leq n}$ hay a lo más un número finito de α 's $\neq 0$.

2) Las f 's en A_S se denominan los polinomios generalizados en coeficientes reales

3) Si $X \subset \mathbb{R}^m$, y si $S = \{p_i : x \in X \mapsto p_i(x) = x_i, \text{ coordenada } i\}$ entonces A_S es la subálgebra de los polinomios en m variables, restringidos a X .

Demostración Teorema de Stone-Weierstrass.

Se reduce a probar varios lemas:

Lemma 1 :- $\exists p_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, f_n polinomial tal que $p \rightarrow \sqrt[n]{n}$ uniformemente.

dem. - Hecho clase anterior. los p_n se construyen recursivamente.

Lemma 2 - $\forall f \in A, |f| \in \overline{A}$

dem. - Hecho clase anterior. la idea es que si M es cota para $|f|$, entonces

$$M p_n \left(\frac{f^2}{M^2} \right) \xrightarrow{\text{uniformemente}} M \sqrt{\frac{f^2}{M^2}} = |f|.$$

Lemma 3 - $f, g \in A \Rightarrow \sup(f, g), \inf(f, g) \in \overline{A}$.

dem. - Basta observar que

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2} \{ f+g + |f-g| \}$$

$$\inf(f, g) = \frac{1}{2} \{ f+g - |f-g| \}$$

usar el lema 2. ■

lema 4. —

$\forall x, y \in X, x \neq y \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \exists f \in A; \begin{cases} f(x) = \alpha \\ f(y) = \beta \end{cases}$

dem. — Como separa los puntos de X , $\exists g \in A; g(x) \neq g(y)$.
Y como A contiene las constantes, tomando

$$f = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)(g - g(x))}{g(y) - g(x)},$$

se chequea trivialmente que $f(x) = \alpha, f(y) = \beta$, y que $f \in A$. ■

lema 5. —

$\forall f \in C^0(X; \mathbb{R}), \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists g \in \overline{A}; \begin{cases} g(x) = f(x) \\ g(y) \leq f(y) + \varepsilon \forall y \in X \end{cases}$

dem. — Primero, observemos que $\forall z \in X, \exists h_z \in \overline{A}; \begin{cases} h_z(x) = f(x) \\ h_z(z) \leq f(z) + \varepsilon/2 \end{cases}$

La existencia de h_z es directa del lema 4 pues, si $z = x$, basta tomar $\alpha = f(x)$ y β , y cualquiera, y si $z \neq x$, basta tomar $\alpha = f(x), \beta = f(z), \gamma = f(z)$, para derivar la existencia de $h_z = g$.

Ahora, como f y h_z son continuas, es directo probar (hágalo como ejercicio) que existe V_z , vecindad de z , tal que $\forall y \in V_z$, $h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon$.

Las vecindades $(V_z)_{z \in X}$ forman recubrimiento de X , compacto, y entonces existe subrecubrimiento finito, digamos $(V_{z_i})_{i=1, \dots, m}$.

Sea $g = \inf_{1 \leq i \leq m} f_{z_i}$. Gracias al lema 3, $g \in \bar{A}$, y es fácil comprobar que g satisface las condiciones del lema 5. ■

Con estos resultados previos, podemos ahora proceder en la demostración del Teorema:

Sea $f \in C^0(X; \mathbb{R})$. Para $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, gracias al lema 5, sabemos que existe $g_x \in \bar{A}$ tal que $\begin{cases} g_x(z) = f(z) \\ f(y) \leq g_x(y) + \varepsilon \end{cases} \forall y \in X$.

Como f y g_x son continuas, y $g_x(x) = f(x)$, es directo probar (hágalo como ejercicio) que existe U_x , vecindad de x , tal que $\forall y \in U_x$, $g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon$.

Ahora, las vecindades $(U_x)_{x \in X}$ cubren X , compacto, luego podemos extraer subrecubrimiento finito, digamos $(U_{x_j})_{j=1, \dots, m}$.

Sea

$$g = \sup_{1 \leq j \leq m} g_{x_j}.$$

Por lema 3, $g \in \bar{A}$, y $\forall y \in X$ se tiene $f(y) - \varepsilon \leq g(y) \leq f(y) + \varepsilon$, pues para cada $y \in X$, existe $j = 1, \dots, m$; $y \in U_{x_j}$. Así, $D(f, g) \leq \varepsilon$.

Resumiendo: $\forall \varepsilon > 0 \exists g \in \bar{A}; D(f, g) \leq \varepsilon \Rightarrow f \in \overline{\bar{A}} = \bar{A}$. ■