

Trabajo dirigido #6 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

Problema 1. Sea (E, d) un espacio métrico, $A, B \subset E$ no vacíos. Para $x \in E$ definimos

$$d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y) \quad \text{y} \quad d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B)$$

- (a) Muestre que

$$d(A, B) = \inf_{(x, y) \in A \times B} d(x, y).$$

Concluya que $d(A, B) = d(B, A)$.

- (b) Muestre que si A es compacto entonces $\exists a \in A$ tal que $d(a, B) = d(A, B)$.
- (c) Muestre que si A es compacto y B es cerrado entonces $d(A, B) = 0$ si y sólo si $A \cap B \neq \emptyset$. Dé un ejemplo donde A y B son cerrados y disjuntos pero $d(A, B) = 0$.

Problema 2. Sea \mathcal{C} el espacio de las funciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} . Considere en \mathcal{C} las dos métricas siguientes:

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \\ d_2(f, g) &= \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

- (a) Pruebe que d_1 y d_2 son efectivamente métricas en \mathcal{C} .
- (b) Pruebe que $d_1(f, g) \leq d_2(f, g) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}$. Concluya que la topología engendrada por d_2 es más fina que la engendrada por d_1 .
- (c) Pruebe que toda bola con respecto a d_2 no contiene ninguna bola con respecto a d_1 . Concluya que la inclusión de topologías demostrada en el punto anterior es estricta.
- (d) Encuentre una sucesión convergente según d_1 pero que no converja según d_2 .
- (e) Pruebe que (\mathcal{C}, d_1) NO es completo, es decir, encuentre una sucesión de Cauchy que no converja.