

## Tarea 2 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

### Problema 1

- (a) Sea  $(E, \mathcal{O})$  un espacio localmente compacto. Dado  $w \notin E$ , consideramos los conjuntos  $E' = E \cup \{w\}$ , y  $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cup \{\mathbb{C}_{E'}K, K \text{ compacto de } E\}$ . Muestre que  $(E', \mathcal{O}')$  es un espacio topológico en el cual  $(E, \mathcal{O})$  es un subespacio.
- (b) Muestre que  $E'$  es separado.
- (c) Sea  $(U_i)_{i \in I}$  un recubrimiento abierto de  $E'$ , muestre que existe un índice  $i_0$  tal que  $U_{i_0} = E \setminus K \cup \{w\}$  donde  $K$  es un compacto de  $E$ . Deduzca que  $E'$  es compacto.
- (d) Pruebe que si  $E$  no es compacto entonces  $\overline{E}^{\mathcal{O}'} = E'$ . Deduzca el *teorema de Alexandroff* : todo espacio localmente compacto  $E$  esta inmerso en un espacio compacto  $E'$ .
- (e) ¿Como queda  $\mathbb{R}$  al *compactificarlo*?, considere  $w = +\infty$ .

### Problema 2

**Definición** Un conjunto parcialmente ordenado  $(\Lambda, \leq)$  se dice dirigido si

$$(\forall \alpha, \beta \in \Lambda)(\exists \gamma \in \Lambda) \quad (\alpha \leq \gamma) \wedge (\beta \leq \gamma)$$

**Definición** Una red en  $(X, \Lambda)$  es una función:

$$\begin{aligned} x : \Lambda &\rightarrow X \\ \alpha &\mapsto x(\alpha) \triangleq x_\alpha \end{aligned}$$

Donde  $(\Lambda, \leq)$  conjunto dirigido. Se denota  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ .

**Ejemplo**  $(X, \sigma)$  espacio topológico,  $x \in X$  y  $\Lambda = \mathcal{N}_x$

$$B_1 \leq B_2 \Leftrightarrow B_2 \subseteq B_1$$

Es orden parcial y es dirigido:

$$(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{N}_x)(\exists V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_x) V \geq V_1 \wedge V \geq V_2$$

Vale decir mientras más pequeña la vecindad más cerca de  $x$  estoy.

**Definición** Sea  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  una red en el espacio topológico  $(X, \sigma)$ . Diremos que  $x \in X$  es un punto de acumulación de la red si

$$(\forall V \in \mathcal{N}_x)(\forall \alpha \in \Lambda)(\exists \alpha' \geq \alpha) \quad x_{\alpha'} \in V$$

El objetivo de este problema es probar el siguiente:

**Teorema 1.**  $(X, \sigma)$  es un espacio topológico compacto si y sólo si toda red en  $(X, \sigma)$  posee al menos un punto de acumulación.

Para ello se le sugiere que proceda e la siguiente forma:

- (a) Para la condición necesaria, use que dada una red  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  los conjuntos  $F_\alpha = \overline{\{x_{\alpha'} : \alpha' \geq \alpha\}}$  satisfacen la PIF.
- (b) Para la condición suficiente, razone por contradicción

**Problema 3.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto. Dado  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recubrimiento abierto de  $X$ , decimos que  $\lambda > 0$  es un *número de Lebesgue para  $\mathcal{U}$*  si para cualquier  $x \in X$  existe un  $i \in I$  tal que  $B(x, \lambda) \subset U_i$ , es decir, si toda bola de radio  $\lambda$  está contenida en algún  $U_i$ . Pruebe que todo recubrimiento abierto de  $X$  posee un número de Lebesgue.

**Problema 4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y  $T : X \rightarrow X$  una función continua. Para  $n \in \mathbb{N}^*$  y para cualquier  $x, y \in X$  definimos

$$d^n(x, y) = \max_{k=0 \dots n-1} d(T^k x, T^k y),$$

donde

$$T^k = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{k \text{ veces}},$$

con  $T^0$  la identidad de  $X$ .

- (a) Pruebe que  $d^n$  es una métrica sobre  $X$  y que genera la misma topología que  $d$ . *Indicación:* para probar la igualdad de topologías, recuerde que una función continua definida en un compacto es uniformemente continua.

Dados  $\epsilon > 0$  y  $n \in \mathbb{N}^*$ , decimos que:

- $E \subset X$  es un conjunto  $(n, \epsilon)$ -separado si  $\forall x, y \in E, x \neq y$ , se tiene que  $d^n(x, y) \geq \epsilon$ .
- $F \subset X$  es un conjunto  $(n, \epsilon)$ -generador si  $\forall x \in X \exists y \in F$  tal que  $d^n(x, y) < \epsilon$ .

Además, definimos las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} s_n(\epsilon) &= \sup\{\#E : E \subset X, \text{ con } E \text{ } (n, \epsilon)\text{-separado}\} \\ r_n(\epsilon) &= \inf\{\#F : F \subset X, \text{ con } F \text{ } (n, \epsilon)\text{-generador}\} \end{aligned}$$

- (b) Pruebe que  $r_n(\epsilon) < \infty$ . Concluya que el ínfimo en la definición de  $r_n(\epsilon)$  puede cambiarse por un mínimo.
- (c) Pruebe que  $s_n(\epsilon) \leq r_n(\epsilon/2)$ . Concluya que  $s_n(\epsilon) < \infty$  y que el supremo en la definición de  $s_n(\epsilon)$  puede cambiarse por un máximo. *Indicación:* pruebe que  $\#E \leq \#F$  para cualquier  $E$   $(n, \epsilon)$ -separado y  $F$   $(n, \epsilon/2)$ -generador.
- (d) Pruebe que  $r_n(\epsilon) \leq s_n(\epsilon)$ . *Indicación:* dado  $E$   $(n, \epsilon)$ -separado tal que  $\#E = s_n(\epsilon)$ , pruebe que  $E$  es  $(n, \epsilon)$ -generador.

**Problema 5.** Un *espacio de recubrimiento (e.r.)* es una terna  $(X, Y, p)$  donde  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos conexos por caminos y localmente conexos por caminos (es decir, todo punto posee una base de vecindades conexas por caminos) y  $p : Y \rightarrow X$  es una función continua y epiyectiva tal que  $\forall x \in X \exists U_x$  vecindad de  $x$ ,  $\forall V$  componente conexa de  $p^{-1}(U_x)$ ,  $p|_V : V \rightarrow U_x$  es un homeomorfismo. Decimos que  $U_x$  es una *vecindad elemental* de  $x$ .

- (a) Pruebe que  $(S^1, \mathbb{R}, \varphi)$ , donde  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$  y  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  está definida por  $\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ , es un espacio de recubrimiento. *Indicación:* para facilitar el problema sólo encuentre en forma gráfica (pero clara) una vecindad elemental del punto  $(1, 0)$  (para los otros puntos la vecindad es análoga).

- (b) Demuestre que toda  $V$  componente conexa de  $p^{-1}(U_x)$  es un conjunto abierto en  $Y$ .
- (c) Muestre que  $p$  es una aplicación abierta, es decir, para todo  $U$  abierto de  $Y$ ,  $p(U)$  es abierto de  $X$ .

Sean  $(X, Y, p)$  e.r.,  $Z$  un espacio topológico conexo y  $f : Z \rightarrow X$  función continua. Una función  $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ , continua, tal que  $p \circ \tilde{f} = f$  será llamada *levantamiento* de  $f$ .

- (d) (Unicidad del levantamiento) Pruebe que si  $\tilde{f}$  y  $\hat{f}$  son levantamientos de  $f$  tales que  $\exists z_0 \in Z$  con  $\tilde{f}(z_0) = \hat{f}(z_0)$ , entonces  $\tilde{f} = \hat{f}$ . *Indicación:* pruebe que el conjunto  $C = \{z \in Z : \tilde{f}(z) = \hat{f}(z)\}$  es abierto y cerrado.
- (e) (Existencia del levantamiento) Ahora supondremos  $Z = [0, 1]$ . Denotemos  $x_0 = f(0)$  y tomemos  $y_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$  cualquiera. Pruebe que existe  $\tilde{f}$  levantamiento de  $f$  tal que  $\tilde{f}(0) = y_0$ . Para ello, siga los siguientes pasos:
  1. Usando un argumento basado en el número de Lebesgue, pruebe que existen  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ ,  $x_i \in X, i = 1, \dots, n$  tales que  $f([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{x_i} \forall i = 1, \dots, n$ , donde  $U_{x_i}$  es una vecindad elemental de  $x_i$ .
  2. Defina  $\tilde{f}$  en cada intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  de tal manera que  $\tilde{f}$  sea un levantamiento de  $f$  cumpliendo  $\tilde{f}(0) = y_0$ .
- (f) Pruebe que  $\forall x_1, x_2 \in X$  se tiene que  $\#p^{-1}(\{x_1\}) = \#p^{-1}(\{x_2\})$ . Para esto considere una función  $g : [0, 1] \rightarrow X$  continua tal que  $g(0) = x_1, g(1) = x_2$  (¿por qué existe tal  $g$ ?). Defina una función  $h_g : p^{-1}(\{x_1\}) \rightarrow p^{-1}(\{x_2\})$  de manera que a  $y_1 \in p^{-1}(\{x_1\})$  le asigne  $\tilde{g}(1)$ , con  $\tilde{g}$  el levantamiento de  $g$  tal que  $\tilde{g}(0) = y_1$ .
  1. Pruebe que  $h_g$  está bien definida.
  2. Demuestre que  $h_g$  es invertible. Concluya.