

Trabajo dirigido #2 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

Problema 1. Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de un espacio topológico (E, Θ) . Pruebe que:

- (a) $(\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$.
- (b) $\bigcup_{i \in I} A_i^\circ \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ$.
- (c) $\overline{(\bigcap_{i \in I} A_i)} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.
- (d) $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{(\bigcup_{i \in I} A_i)}$.
- (e) Para los casos (a) y (d) pruebe que se tiene la igualdad cuando I es finito y muestre con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta cuando I es infinito.
- (f) Para los casos (b) y (c) muestre con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta aun en el caso que I es finito.

Problema 2. Sean X un conjunto y $C : \mathcal{P}(X) \mapsto \mathcal{P}(X)$ una función que satisface:

- (a) $C(\emptyset) = \emptyset$
- (b) $A \subseteq C(A), \forall A \in \mathcal{P}(X)$
- (c) $C(C(A)) = C(A), \forall A \in \mathcal{P}(X)$
- (d) $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B), \forall A, B \in \mathcal{P}(X)$

Considere

$$\Theta = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists B \in \mathcal{P}(X) \text{ tal que } A = C(B)^c\}.$$

Muestre que Θ es una topología para X y que C es el operador adherencia para esta topología, es decir, $C(A) = \overline{A}, \forall A \in \mathcal{P}(X)$.