

MA37A Optimización

Programación Lineal Entera

Profesor: Héctor Ramírez
Auxiliar: Oscar Peredo

23 de octubre de 2006

Dado el siguiente problema:

$$(\mathcal{P}) : \quad \text{mín} \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, k \leq n\}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, revisaremos dos posibles formas (algoritmos) de resolverlo.

1. Ramificación y Acotamiento

Una manera de resolver (\mathcal{P}) es usar la estrategia de **Ramificación y Acotamiento** (Branch & Bound), la cual consiste en generar un árbol de subproblemas asociados al problema original, donde la región factible se "corta" en cada nodo del árbol (se le agregan restricciones de manera incremental).

La proposición fundamental en este procedimiento es la siguiente:

Proposición 1. *Consideremos el problema $z = \text{máx}\{c^t x : x \in S\}$ y $S = \cup_{i=1}^K S_i$ la descomposición de S en conjuntos más "pequeños" (en el sentido de la inclusión). Sean $z^k = \text{máx}\{c^t x : x \in S_k\}$ para $k \in \{1, \dots, K\}$. Entonces $z = \text{máx}_{k \in \{1, \dots, K\}} z^k$*

El árbol tiene como raíz al problema (\mathcal{P}_0) (se le llama problema relajado), que es idéntico al problema (\mathcal{P}) pero sin la restricción $x \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Se resuelve usando algún método conocido (por ejemplo simplex) y si la solución tiene alguna componente no-entera, por ejemplo, $x_i = a_i \notin \mathbb{Z}$, se realiza un corte en esa variable. Se generan dos subproblemas (\mathcal{P}_1) y (\mathcal{P}_2) , idénticos al problema (\mathcal{P}_0) , pero con las restricciones $x_i \geq \lceil a_i \rceil$ y $x_i \leq \lfloor a_i \rfloor$ agregadas respectivamente. Se repite el procedimiento con cada uno de estos problemas y se contruye el árbol con las soluciones encontradas. El criterio de parada en una cierta rama del árbol consiste en chequear infactibilidad y comparar el valor de la función objetivo con el mejor valor obtenido en alguno de los nodos (si es peor, no se continua cortando por esa rama).

2. Planos Cortantes de Gomory (OPCIONAL)

Otra manera de resolver el problema (\mathcal{P}) es utilizar los **Planos Cortantes de Gomory** (Gomory Cuts). Esta estrategia genera restricciones (no necesariamente del tipo $x_i \leq \lfloor \alpha \rfloor$ o $x_i \geq \lceil \alpha \rceil$) que cortan a la región factible y van mejorando la solución del problema inicial, que en este caso también es el problema relajado (\mathcal{P}_0) .

Consideremos que $x = [x_B | x_N]$ es solución de (\mathcal{P}_0) . Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (B|N)(x_B|x_N)^t &= b \\ Bx_B + Nx_N &= b \\ x_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \end{aligned}$$

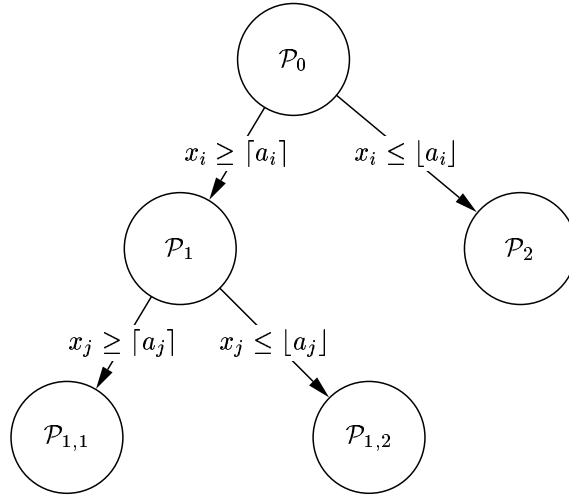


Figura 1: Ejemplo de árbol generado por el algoritmo Branch & Bound.

Escogiendo $i \in \text{index}(B)$ (los índices asociados a x_B), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 x_i + (B^{-1}N)_{i,\cdot} \cdot x_N^t &= (B^{-1}b)_i \\
 x_i + \sum_{j \in \text{index}(N)} (B^{-1}N)_{i,j} x_j &= (B^{-1}b)_i
 \end{aligned}$$

Como $x_j \geq 0$ para todo $j \in \text{index}(N)$:

$$\begin{aligned}
 x_i + \sum_{j \in \text{index}(N)} \lfloor (B^{-1}N)_{i,j} \rfloor x_j &\leq x_i + \sum_{j \in \text{index}(N)} (B^{-1}N)_{i,j} x_j \\
 &= (B^{-1}b)_i
 \end{aligned}$$

Se impone que $x_j \in \mathbb{Z}$ para todo $j \in \text{index}(N)$:

$$x_i + \sum_{j \in \text{index}(N)} \lfloor (B^{-1}N)_{i,j} \rfloor x_j \leq \lfloor (B^{-1}b)_i \rfloor$$

Agregando esta última desigualdad, se genera el corte de la región factible que ayuda a encontrar la solución entera.

El algoritmo es el siguiente:

Procedimiento GOMORY(\mathcal{P}) $k \leftarrow 0$ Resolver el problema (\mathcal{P}_k) . x óptimo, B base asociada al óptimo.**iteración** x es solución no-entera $index(B) \leftarrow$ Índices asociados a B . $index(N) \leftarrow$ Índices asociados a N .Escoger $i \in index(B)$.

$$(\mathcal{P}_{k+1}) \leftarrow (\mathcal{P}_k) + \left\{ x_i + \sum_{j \in index(N)} \lfloor (B^{-1}N)_{i,j} \rfloor x_j \leq \lfloor (B^{-1}b)_i \rfloor \right\}$$

 $k \leftarrow k + 1$ Resolver el problema (\mathcal{P}_k) . x óptimo, B base asociada al óptimo.**fin iteración****Procedimiento**

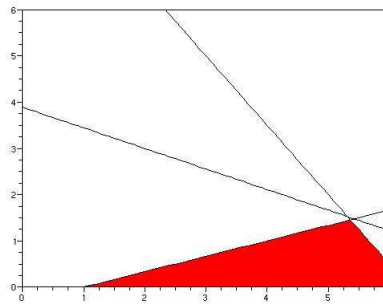
3. Problemas

Problema 1. Resolver el siguiente problema usando Ramificación y Acotamiento (Branch & Bound):

$$\begin{array}{rclcl} \max & 9x_1 & + & 5x_2 & \\ \text{s.a} & 4x_1 & + & 9x_2 & \leq 35 \\ & x_1 & & & \leq 6 \\ & x_1 & - & 3x_2 & \geq 1 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 19 \\ & & & x_1, x_2 & \geq 0 \\ & & & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z} \end{array}$$

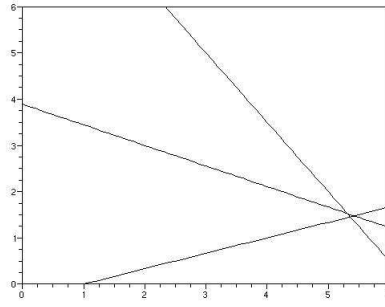
Solución 1. Hay dos formas de resolver este problema: usando el método gráfico visto en cátedra o con fase I-II de simplex.

- La forma gráfica consiste en dibujar la región factible y encontrar el punto óptimo (utilizando la dirección del gradiente o de alguna otra forma). Luego se verifica si ese punto es entero, si no, se aplica la ramificación.

El gráfico de la región factible del problema inicial es la siguiente:

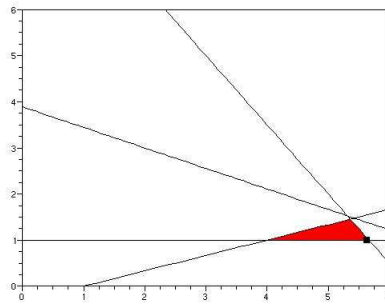
La solución es $(x_1, x_2) = (6, 1/2)$. Se debe realizar un corte en x_2 , es decir, agregar $x_2 \geq \lceil 1/2 \rceil$ o $x_2 \leq \lfloor 1/2 \rfloor$.

Si se agrega la restricción $x_2 \leq 0$, el gráfico queda:



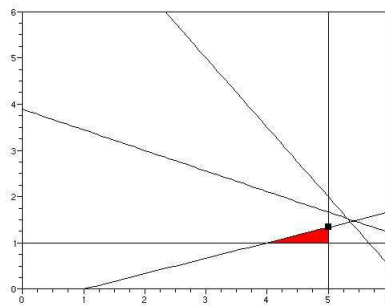
cuya solución es $(x_1, x_2) = (6, 0)$, con valor objetivo $z = 54$. Se detiene la ramificación por este nodo. Se guarda esta solución como la **mejor** obtenida hasta el momento, llamémosla z^* .

Si se agrega la restricción $x_2 \geq 1$, el gráfico queda:



cuya solución es $(x_1, x_2) = (5, 1)$, con valor objetivo $z = 56$. Se debe realizar un corte en x_1 , es decir, agregar $x_1 \geq \lceil 5,666 \dots \rceil$ o $x_1 \leq \lfloor 5,666 \dots \rfloor$.

Si se agrega la restricción $x_1 \leq 5$ el gráfico queda:



cuya solución es $(x_1, x_2) = (5, 1,666 \dots)$ con valor objetivo $z = 53,333 \dots$. Como el valor objetivo en este nodo es menor que z^* , no se sigue ramificando.

Si se agrega la restricción $x_1 \geq 6$ el problema queda infactible (con región factible vacía).

Por lo tanto la solución es $(x_1, x_2) = (6, 0)$ con valor objetivo $z^* = 54$.

- La otra forma era utilizar simplex fase I-II. Luego de aplicar simplex fase I, se obtiene como resultado que la base esta compuesta por las columnas asociadas a x_1, x_3, x_4 y x_6 (x_3, x_4, x_5, x_6 son variables de holgura).

Para cualquiera de estas dos formas, el primer punto óptimo es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6 \quad 0,5 \quad 6,5 \quad 0 \quad 4,5)$$

Como $x_2 = 0,5$, se debe cortar de la forma $(P_1) : x_2 \leq 0$ y $(P_2) : x_2 \geq 1$.

Al resolver (P_1) se obtiene como solución el vector

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (6 \quad 0 \quad 11 \quad 0 \quad 5 \quad 1 \quad 0)$$

que satisface la condición de $x_i \in \mathbb{Z}$. Se detiene la ramificación por este nodo.

Al resolver (P_2) se obtiene como solución el vector

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (5,666... \quad 1 \quad 3,333... \quad 0,333... \quad 3,666... \quad 0 \quad 0)$$

Como $x_1 = 5,666...$, se debe cortar de la forma $(P_3) : x_1 \leq 5$ y $(P_4) : x_1 \geq 6$.

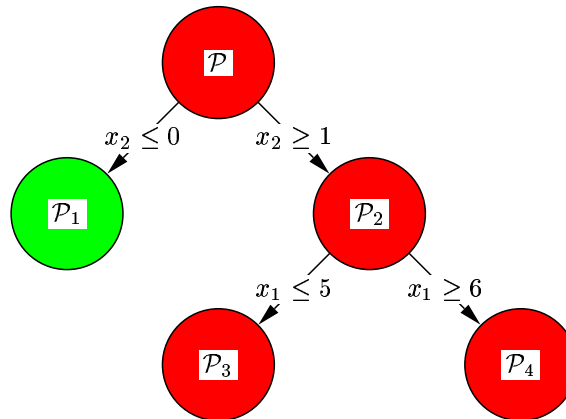
Al resolver (P_3) se obtiene

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (5 \quad 1,666... \quad 0 \quad 1 \quad 2,333... \quad 0,666... \quad 0,666...)$$

Sin embargo, el valor de la función objetivo es $z = 53,333...$, pero como el valor en (P_2) es $z = 56$ y deseamos maximizar, no nos sirve seguir ramificando por este camino. Se detiene la ramificación por este nodo.

Al resolver (P_4) se obtiene (en base a simplex-dual o ver el dibujo) que el problema es infactible. Se detiene la ramificación por este nodo.

El árbol queda de la forma



El único nodo que sirve es (P_1) , cuyo valor objetivo es $z = 54$.

Problema 2 (Opcional: El Problema de Satisfiabilidad (SAT)). Consideremos la siguiente expresión lógica (se llama "conjunción de 3 cláusulas"):

$$\Phi : \{V, F\}^4 \rightarrow \{V, F\}$$

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3) \wedge (\sim x_1 \vee x_3 \vee \sim x_4) \wedge (x_2 \vee \sim x_3 \vee x_4)$$

Plantee el problema que calcula las asignaciones de cada variable x_i de tal forma que Φ sea verdadero siempre.

Solución 2. Consideremos $x_i = 1$ si y solo si x_i es verdadera, y $x_i = 0$ si y solo si x_i es falsa. Como es una conjunción de 3 cláusulas, cada cláusula debe ser verdadera para que Φ sea verdadera. Luego, la región factible que contiene a las asignaciones a las variables que hacen $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (1 - x_3) &\geq 1 \\ (1 - x_1) + x_3 + (1 - x_4) &\geq 1 \\ x_2 + (1 - x_3) + x_4 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Hay una desigualdad pues la cláusula es verdadera si y solo si la suma es mayor que cero y falsa si la suma es cero. La restricción binaria $x_i \in \{0, 1\}$ se reemplaza por $x_i \geq 0, x_i \leq 1, x_i \in \mathbb{Z}$.

Definiendo la variable $Q \in \mathbb{R}$ se tiene que el problema:

$$\begin{array}{llllll} \max & Q & & & & \\ \text{s.a} & x_1 & +x_2 & +(1-x_3) & & \geq Q \\ & (1-x_1) & & +x_3 & +(1-x_4) & \geq 1 \\ & & x_2 & (1-x_3) & +x_4 & \geq 1 \\ & & & & x_i & \in \mathbb{Z} \\ & & & & x_i & \in [0, 1] \end{array}$$

La solución de este problema, usando simplex y sin considerar las restricciones de integridad, es $(x_1, x_2, x_3, x_4, Q) = (1, 1, 0, 0, 3)$. Luego, las 3 restricciones se cumplen y son mayores que cero, es decir, existe una asignación de las variables x_i que hacen verdaderas todas las cláusulas simultaneamente, y por lo tanto, $\Phi(1, 1, 0, 0) = 1$.