MA37A Optimización
Análisis de Sensibilidad

Profesor: Héctor Ramírez
Auxiliares: Rodrigo López, Oscar Peredo

11 de octubre de 2006

Una vez resuelto un problema en forma estandar $\min\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}$ se puede analizar que ocurre con la solución si varían ciertos parámetros del problema.
En todos los casos se asume que el cuadro óptimo es de la forma:

0	$\overline{c}_N^t$	$-z$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

1. Variación en coeficientes de función objetivo: c

Si $c \Rightarrow \tilde{c}$, se debe recalcular $\overline{c}_N^t$:

$$\overline{\tilde{c}}_N^t = \tilde{c}_N^t - \tilde{c}_B^t B^{-1} N$$

- Si $\overline{\tilde{c}}_N^t \geq 0$: La base óptima no cambia. La función objetivo toma el valor $\tilde{c}_B^t B^{-1} b$.
- Si $\overline{\tilde{c}}_N^t$ tiene una componente negativa: Iterar con simplex.

2. Variación en lado derecho: b

Si $b \Rightarrow \tilde{b}$, se debe recalcular $B^{-1}b$.

- Si $B^{-1}\tilde{b} \geq 0$: La solución es óptima aún. La función objetivo toma el valor $c_B^t B^{-1}\tilde{b}$.
- Si $B^{-1}\tilde{b}$ tiene una componente negativa: Iterar con simplex-dual.

3. Introducción de nueva variable

Se introduce la variable x_{n+1}, con coeficiente c_{n+1} y columna $A_{\cdot,n+1}$. El costo reducido de esa variable será:

$$\overline{c}_{n+1} = c_{n+1} - c_B^t B^{-1} A_{\cdot,n+1}$$

El cuadro asociado será:

0	$\overline{c}_N^t$	$c_{n+1} - c_B^t B^{-1} A_{\cdot,n+1}$	$-z$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}A_{\cdot,n+1}$	$B^{-1}b$

- Si $\overline{c}_{n+1} < 0$:
  - Si $B^{-1}A_{\cdot,n+1} \leq 0$: Se produce no-acotamiento.
  - Si $B^{-1}A_{\cdot,n+1}$ tiene alguna componente mayor a cero: Iterar con simplex.
- Si $\overline{c}_{n+1} \geq 0$: La solución sigue siendo óptima.

4. Introducción de nueva restricción

- **Restricción $\leq$:**
Se agrega la restricción $d^t x \leq d_0$ (o equivalentemente $d^t x + x_{n+1} = d_0$). El problema queda de la forma:

$$\text{mín}\left\{(c^t,0)\cdot(x,x_{n+1}) : \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^t & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix}\right\}$$

Se agrega x_{n+1} a la base:

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^t & 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^t B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los costos reducidos y la función objetivo no cambian (¿porqué?). Solamente cambia $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$ y $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}\tilde{N} &= \tilde{B}^{-1}\begin{pmatrix} N \\ d_N^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}N \\ d_N^t - d_B^t B^{-1}N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}\tilde{b} &= \tilde{B}^{-1}\begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ d_0 - d_B^t B^{-1}b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **Restricción $\geq$:**

Se agrega la restricción $d^t x \geq d_0$ (o equivalentemente $d^t x - x_{n+1} = d_0$). El problema queda de la forma:

$$\text{mín}\left\{(c^t,0)\cdot(x,x_{n+1}) : \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^t & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix}\right\}$$

Se agrega x_{n+1} a la base:

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^t & -1 \end{bmatrix} \\ \tilde{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ d_B^t B^{-1} & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los costos reducidos y la función objetivo no cambian (¿porqué?). Solamente cambia $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$ y $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}\tilde{N} &= \tilde{B}^{-1}\begin{pmatrix} N \\ d_N^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}N \\ -d_N^t + d_B^t B^{-1}N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}\tilde{b} &= \tilde{B}^{-1}\begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ -d_0 + d_B^t B^{-1}b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **Restricción =:**

  Hay 2 formas (se recomienda utilizar la Forma 2):

Forma 1 Se agrega la restricción $d^t x = d_0$. El problema queda de la forma:

$$\text{mín}\left\{c^t x : \left[\begin{array}{c} A \\ d^t \end{array}\right] x = \left(\begin{array}{c} b \\ d_0 \end{array}\right)\right\}$$

Se agrega alguna columna N_j a la base y se quita esa columna a N (chequear que es l.i. a las otras columnas de la base):

$$\begin{aligned}
\tilde{B} &= \left[\begin{array}{cc} B & N_j \\ d_B^t & d_{N_j} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc} B - \frac{N_j d_B^t}{d_{N_j}} & N_j - \frac{N_j d_{N_j}}{d_{N_j}} \\ d_B^t & d_{N_j} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc} B - \frac{N_j d_B^t}{d_{N_j}} & 0 \\ \frac{d_B^t}{d_{N_j}} & 1 \end{array}\right] \\
\tilde{B}^{-1} &= \left[\begin{array}{cc} \hat{B}^{-1} & 0 \\ -\hat{d}_B^t \hat{B}^{-1} & 1 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Con $\hat{B} = B - \frac{N_j d_B^t}{d_{N_j}}$ y $\hat{d}_B^t = \frac{d_B^t}{d_{N_j}}$.

Los costo reducidos y la función objetivo cambian (calcular). Calculemos $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$ y $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ (en este caso, la matriz N denota a la matriz N original sin la columna N_j):

$$\begin{aligned}
\tilde{B}^{-1}\tilde{N} &= \tilde{B}^{-1}\left(\begin{array}{c} N \\ d_N^t \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c} \hat{B}^{-1}N \\ d_N^t - \hat{d}_B^t \hat{B}^{-1} N \end{array}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}^{-1}\tilde{b} &= \tilde{B}^{-1}\left(\begin{array}{c} b \\ d_0 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c} \hat{B}^{-1}b \\ d_0 - \hat{d}_B^t \hat{B}^{-1} b \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Forma 2 Se calcula el valor $d^t x$, con x la solución en curso.

- Si se tiene que $d^t x < d_0$, entonces se debe agregar la restricción $d^t x \geq d_0$ al problema. Se aplica lo mencionado en los puntos anteriores.
- Si se tiene que $d^t x > d_0$, entonces se debe agregar la restricción $d^t x \leq d_0$ al problema. Se aplica lo mencionado en los puntos anteriores.

Finalmente, hay que analizar lo siguiente:

- Si $\tilde{B}^{-1}\tilde{b} \geq 0$: La solución es óptima aún. La función objetivo toma el valor $c_B^t \tilde{B}^{-1}\tilde{b}$.
- Si $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$ tiene una componente negativa: Iterar con simplex-dual.

5. Problemas

Problema 1 (Examen Primavera 2005). *Se desea encontrar una dieta a base de Fierro y Vitamina B, cuyo costo sea lo menor posible. Los requisitos mínimos de Fierro y Vitamina B son 21 mg. y 12 mg., respectivamente. Los alimentos que podrían formar esta dieta son huevos, papas, carne, leche y espinacas, cuyo aportes nutricionales se ven a continuación:*

Alimento (gr)	*Fierro (mg/gr)*	*Vit. B (mg/gr)*	*Precio ($/gr)*
huevos	1	0	20
papas	0	1	10
carne	1	2	31
leche	1	1	11
espinacas	2	1	12

(a) *Formule este problema como uno de programaci'on lineal, y resuelva usando SIMPLEX.*

(b) *Calcule el costo marginal asociado a un cambio en los requisitos de Fierro y Vitamina B. Luego verifique, v'ia dualidad fuerte, que la soluci'on del problema es consumir solamente* 3 *gr. de leche,* 9 *gr. de espinacas.*

(c) *¿Cu'anto puede cambiar el costo de la leche para que las anteriores cantidades de leche y espinacas sigan siendo 'optimas?*

(d) *Suponga que el requerimiento de Fierro aumenta a* 24 *miligramos. ¿Es necesario cambiar la dieta? ¿y si disminuye a 12 mg?*

(e) *Ahora existe un nuevo requerimiento que debe satisfacer la dieta: "la cantidad m'inima de proteínas debe ser de 80 mg." Encuentre la nueva dieta usando que el aporte proteico de cada alimento es:*

Alimento (gr)	*huevos*	*papas*	*carne*	*leche*	*espinacas*
Prote'inas (mg/gr)	1	3	0	8	6

(f) *Si ahora se exige que la cantidad exacta de proteínas debe ser 80 mg., utilizando la tabla del item anterior, deduzca si se debe cambiar la dieta o no. Explique.*

Solución 1. *:*

(a) *El problema se modela de la forma:*

$$\begin{array}{lccc} \boldsymbol{min} & 20x_1 + 10x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5 & & \\ \boldsymbol{s.a} & x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 & \geq & 21 \\ & x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 & \geq & 12 \\ & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

El tableau inicial es:

$$\begin{array}{|ccccccc|c|} \hline 20 & 10 & 31 & 11 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 12 \\ \hline \end{array}$$

Utilizando la solución básica factible $x^t = (0, 0, 1, 0, 10)$ *dada en la indicación (satisface las restricciones y hace* $B^{-1}b \geq 0$*, por eso es solución basica factible) se deduce que la base son las columnas 3 y 5.*

El tableau final, luego de fase I y II es:

19	0	10	0	0	1	10	-141
0,5	0	0,5	0,5	1	$-0{,}5$	0	10,5
$-0{,}5$	1	1,5	0,5	0	0,5	-1	1,5

Es decir, la solución es el vector $x^t = (0, 3/2, 0, 0, 21/2)$ *con f.o. de valor* 141.

(b) *Los costos marginales asociados al Fierro y la Vitamina B son* 1 *y* 10 *respectivamente (ver columna* `Dual value` *de la parte anterior, con los signos cambiados para concordancia).*
La solución propuesta, $\tilde{x}^t = (0, 0, 0, 3, 9)$ *satisface* $c^t\tilde{x} = 141$. *Como la solución encontrada por simplex tiene valor objetivo 141, por dualidad fuerte, ambas son soluciones óptimas.*

(c) *La base propuesta en la solución* $\tilde{x}^t = (0, 0, 0, 3, 9)$ *es no-degenerada (utiliza 2 columnas, la 4 y 5, y son l.i.). Luego, se tiene lo siguiente:*

$$\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
B^{-1} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
N &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
B^{-1}N &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
B^{-1}b &= \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \\
\overline{c}_N^t &= c_N^t - c_B^t B^{-1}N \\
&= (20, 10, 31, 0, 0) - (11, 12)\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= (19, 0, 10, 1, 10)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el tableau asociado a esta base es:

19	0	10	0	0	1	10	$*$
-1	2	3	1	0	1	-2	3
1	-1	-1	0	1	-1	1	9

(las columnas 4 y 5 son básicas). Consideremos $\tilde{c}^t = (20, 10, 31, 11 + \delta, 12)$, *con* $\tilde{c}_B^t = (11 + \delta, 12)$. *El vector de costos reducidos asociado es:*

$$\begin{aligned}
\overline{\tilde{c}}_N^t &= \tilde{c}_N^t - \tilde{c}_B^t B^{-1}N \\
&= (20, 10, 31, 0, 0) - (11 + \delta, 12)\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= (19 + \delta, -2\delta, 10 - 3\delta, 1 - \delta, 10 + 2\delta)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\delta > 0$, *el costo reducido asociado a* x_2 *será negativo y la solución cambiará. Si* $\delta < 0$, *el menor valor que puede tomar de tal forma que ningún costo reducido sea negativo es* $\delta = -5$. *Es decir, el valor de la leche puede disminuir en 5 unidades sin alterar la solución* $\tilde{x}^t = (0, 0, 0, 3, 9)$.

(d) *El vector* b *cambia a* $\tilde{b} = (24, 12)^t$. *Se debe recalcular* $B^{-1}\tilde{b}$:

$$\begin{aligned}
B^{-1}\tilde{b} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución no cambia y no es necesario cambiar la dieta (no hay coordenadas negativa en el lado derecho).

Si $\tilde{b} = (12, 12)^t$ *se tiene:*

$$\begin{aligned} B^{-1}\tilde{b} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto la dieta tampoco cambia.

(e) *Se agrega la restricción*

$$x_1 + 3x_2 + 8x_4 + 6x_5 \geq 80$$

y el problema queda:

$$\begin{array}{lrrrrrll} \boldsymbol{min} & 20x_1 & +10x_2 & +31x_3 & +11x_4 & +12x_5 & & \\ \boldsymbol{s.a} & x_1 & & +x_3 & +x_4 & +2x_5 & \geq & 21 \\ & & x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & \geq & 12 \\ & x_1 & +3x_2 & & +8x_4 & +6x_5 & \geq & 80 \\ & & & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Se agrega una nueva variable de holgura s_3 *y el problema queda de la forma:*

$$\text{mín}\left\{(c^t, 0)\cdot(x, s_3) : \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^t & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix}\right\}$$

con $x^t = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1, s_2)$, $d^t = (1, 3, 0, 8, 6, 0, 0)$ *y* $d_0 = 80$.
Agregaremos la columna asociada a s_3 *a la nueva base:*

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^t & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para calcular la inversa, se debe modificar la fórmula presentada en la sección 4, pues en la celda (3,3) hay un -1:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ d_B^t B^{-1} & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 10 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculemos $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}\tilde{N} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ d_B^t B^{-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N \\ d_N^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}N \\ d_B^t B^{-1} N - d_N^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 7 & 18 & 2 & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculemos $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}^{-1}\tilde{b} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ d_B^t B^{-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ d_B^t B^{-1}b - d_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Como la tercera coordenada de $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$ es negativa, se debe aplicar el algoritmo simplex-dual. Con la información anterior, el tableau inicial es el siguiente:

19	0	10	0	0	1	10	0	*
−1	2	3	1	0	1	−2	0	3
1	−1	−1	0	1	−1	1	0	9
−3	7	18	0	0	2	−10	1	−2

Simplex-dual nos dice que se debe pivotear en (3,8), pues $\text{máx}\{\frac{10}{-10}, \frac{19}{-3}\} = -1$*, asociado a la columna 8. Luego de pivotear, el tableau resultante y final es:*

16	7	28	0	0	3	0	1	*
−0,4	0,6	−0,6	1	0	0,6	0	−0,2	3,4
0,7	−0,3	0,8	0	1	−0,8	0	0,1	8,8
0,3	−0,7	−1,8	0	0	−0,2	1	−0,1	0,2

El valor de la función objetivo para esta solución es 143. La nueva dieta consiste en 3.4 gr. de leche y 8.8 gr. de espinacas.

(f) Vamos a resolver esta pregunta de 2 forma. La primera tiene varios cálculos, pero responde a la pregunta viendo que si se pivotea en alguna otra columna se esta llegando a una solución donde hay que aplicar simplex-dual. La segunda forma utiliza la solución actual y ve si es necesario cambiarla o no, y si es necesario, se utiliza la introducción de una nueva variable con desigualdad $\geq$ o $\leq$.

Forma 1 *La pregunta que nos hacen se refiere a calcular $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$ y ver el signo de cada coordenada. Si todas son positivas, entonces la solución no cambia (la dieta no cambia). Si hay alguna negativa, la dieta cambia, pues hay que aplicar simplex-dual y la solución cambia.*

El problema queda:

$$\begin{array}{llllllll}
\textbf{\textit{min}} & 20x_1 & +10x_2 & +31x_3 & +11x_4 & +12x_5 & & \\
\textbf{\textit{s.a}} & x_1 & & +x_3 & +x_4 & +2x_5 & \geq & 21 \\
 & & x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & \geq & 12 \\
 & x_1 & +3x_2 & & +8x_4 & +6x_5 & = & 80 \\
 & & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}$$

La tabla inicial es:

20	10	31	11	12	0	0	0
1	0	1	1	2	−1	0	21
0	1	2	1	1	0	−1	12
1	3	0	8	6	0	0	80

Recordemos que las columnas 4 y 5 son base, es decir, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Calculemos* $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$, *donde* $\tilde{B}^{-1}$ *depende de* $\hat{B} = B - \frac{N_j d_B^t}{d_{N_j}}$ *para cada* j, *donde* $d_{N_j} \neq 0$ *(en rigor hay que calcular* $\hat{B}^{-1}b$ *y* $d_0 - \hat{d}_B^t \hat{B}^{-1}b$, *pero solo calcularemos el primer termino y veremos que tiene alguna componente negativa). Se tiene que* $d_B^t = (8,6)$:

- *Para* $j = 1$, $d_{N_1} = 1, N_1 = (1,0)^t$:

$$\begin{aligned}
B - \frac{N_1 d_B^t}{d_{N_1}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{1}(1,0)^t(8,6) \\
&= \begin{bmatrix} 1-8 & 2-6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
(B - \frac{N_1 d_B^t}{d_{N_1}})^{-1} &= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -7 \end{bmatrix} \\
(B - \frac{N_1 d_B^t}{d_{N_1}})^{-1} b &= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}(21,12)^t \\
&= \frac{1}{-3}(69,-105)^t
\end{aligned}$$

  Como la primera coordenada es negativa (-23), hay que aplicar simplex dual, y la base cambiará (la dieta tambien cambiará).

- *Para* $j = 2$, $d_{N_2} = 3, N_2 = (0,1)^t$:

$$\begin{aligned}
B - \frac{N_2 d_B^t}{d_{N_2}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(0,1)^t(8,6) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1-8 & 1-6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & -5 \end{bmatrix} \\
(B - \frac{N_1 d_B^t}{d_{N_1}})^{-1} &= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \\
(B - \frac{N_1 d_B^t}{d_{N_1}})^{-1} b &= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}(21,12)^t \\
&= \frac{1}{9}(-129,159)^t
\end{aligned}$$

  Como la primera coordenada es negativa (-129/9), hay que aplicar simplex dual, y la base cambiará (la dieta tambien cambiará).

Para N_3, N_4 *y* N_5, *se tiene que* $d_{N_3} = d_{N_4} = d_{N_5} = 0$, *luego, no se realiza el calculo anterior (no esta definido* $\frac{1}{d_{N_j}}$*).*

Por lo tanto, al ingresar la nueva restricción, al incluir una columna válida a la base ($j \in \{1,2\}$)*, siempre se debe cambiar la solución en la que nos encontramos, es decir, se debe cambiar la dieta.*

Forma 2 Nuestro tableau final con base asociada a las columnas 4 y 5 es:

19	0	10	0	0	1	10	*
-1	2	3	1	0	1	-2	3
1	-1	-1	0	1	-1	1	9

Veamos si la solución actual $x^t = (0,0,0,3,9)$ *satisface la nueva restricción:*

$$d^t(0,0,0,3,9)^t \quad = \quad 78$$

Luego, podemos considerar a la nueva restricción como $\geq$ *(si se considera la nueva restricción con desigualdad* $\leq$*, la solución no cambiará) y el nuevo problema es el siguiente:*

$$\begin{array}{lllllllll}
\boldsymbol{min} & 20x_1 & +10x_2 & +31x_3 & +11x_4 & +12x_5 & & \\
\boldsymbol{s.a} & x_1 & & +x_3 & +x_4 & +2x_5 & \geq & 21 \\
 & & x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & \geq & 12 \\
 & x_1 & +3x_2 & & +8x_4 & +6x_5 & \geq & 80 \\
 & & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}$$

Introduciendo la variable de holgura s_3 *el problema queda:*

$$\min\left\{(c^t,0)\cdot(x,s_3) : \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^t & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix}\right\}$$

Estamos en el caso de la parte (e), luego, el tableau final es el siguiente:

19	0	10	0	0	1	10	0	$*$
-1	2	3	1	0	1	-2	0	3
1	-1	-1	0	1	-1	1	0	9
-3	7	18	0	0	2	-10	1	-2

Y hay que aplicar simplex-dual, por lo tanto la solución cambiará (y la dieta).