

# MA37A Optimización

## Flujo con costo mínimo

Profesor: Héctor Ramírez  
Auxiliar: Oscar Peredo

10 de octubre de 2006

### 1. Capacidad No Acotada

Dado un grafo dirigido  $G = (V, E)$ , una función de costos  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , y una función de oferta/demanda  $b : V \rightarrow \mathbb{R}$ , se desea encontrar un **flujo**  $x = (x_e)_{e \in E}$  que resuelva el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{e \in E} c_e x_e \\ & \text{s.a} && \sum_{f \in OUT(v)} x_{(v,f)} - \sum_{g \in IN(v)} x_{(g,v)} = b_v \quad \forall v \in V \\ & && x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

Donde los conjuntos  $IN(v)$  y  $OUT(v)$  (subconjuntos de  $V$ ) contienen a los nodos de llegada partiendo de  $v$  y de salida llegando a  $v$  respectivamente.

Para ello ocuparemos el algoritmo **simplex para redes con capacidad no acotada**, detallado en la figura.

En el paso (1), la manera de encontrar un árbol generador  $T$  se puede realizar escribiendo el problema de forma  $\max\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}$  y realizando la fase I del algoritmo simplex o simplemente ir saturando los arcos con costo mínimo hasta formar un árbol (recuerde que en un árbol, el sentido de los arcos da lo mismo).

En el paso (9), el conjunto  $\mathcal{C}^-$  representa a todos los arcos del ciclo  $\mathcal{C}$  que tienen sentido opuesto a  $e$ . Análogamente, el conjunto  $\mathcal{C}^+$  representa a los arcos con igual sentido.

En el paso (12), se necesitan actualizar solamente los arcos que partían o llegaban a alguno de los nodos que conformaban el arco de salida  $u$ , ya que el resto de los valores de  $\pi$  y  $\bar{c}$  se mantiene igual.

### 2. Capacidad Acotada

Si al problema original se le agregan dos funciones,  $l : E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  y  $u : E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , (las cotas inferior y superior de capacidad para cada arco) el problema queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{e \in E} c_e x_e \\ & \text{s.a} && \sum_{f \in OUT(v)} x_{(v,f)} - \sum_{g \in IN(v)} x_{(g,v)} = b_v \quad \forall v \in V \\ & && x_e \geq l_e \quad \forall e \in E \\ & && x_e \leq u_e \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

---

**Algorithm 1** SimplexRedes( $G = (V, E), c, b$ )

---

```
1: Encontrar árbol generador  $T$  (solución básica factible inicial).
2: Calcular los flujos  $x_e$  con  $e \in T$  (flujos básicos).
3: Escoger  $u \in V$  arbitrario y asignar  $\pi_u = 0$ .
4: Encontrar el vector  $\pi$ , a partir de las ecuaciones  $c_{(u,v)} = \pi_u - \pi_v$  para cada  $(u, v) \in T$ .
5: Encontrar el vector  $\bar{c}$ , a partir de las ecuaciones  $\bar{c}_{(u,v)} = c_{(u,v)} - (\pi_u - \pi_v)$  para cada  $(u, v) \notin T$ .
6: while Existe un arco  $e = (u, v) \notin T$  tal que  $\bar{c}_e < 0$  do
7:   Identificar el único ciclo  $\mathcal{C}$  que se forma tras incorporar  $e$  a  $T$ .
8:   if  $\mathcal{C}^- = \emptyset$  then
9:     Parar.
10:  end if
11:  Asignar un flujo de  $+\lambda$  a los arcos de  $\mathcal{C}^+$ , incluido  $e$ .
12:  Asignar un flujo de  $-\lambda$  a los arcos de  $\mathcal{C}^-$ .
13:  Escoger  $\lambda$  tal que:
      
$$\begin{aligned} \lambda &= \max\{\lambda : x_u - \lambda \geq 0, \text{ para todo } u \in \mathcal{C}^-\} \\ &= \min\{x_u : u \in \mathcal{C}^-\} \end{aligned}$$

14:   $T \leftarrow (T \setminus \{u\}) \cup \{e\}$ 
15:  Se actualizan los vectores  $\pi$  y  $\bar{c}$ .
16: end while
```

---

Al igual que el problema no acotado, la solución se puede caracterizar por un árbol generador  $T$ . Se puede demostrar que en caso de estar frente a una solución óptima caracterizada por  $T$ , los arcos se pueden dividir en 3 conjuntos:

- $e \in T$  ( $x_e$  tiene un valor en  $[l_e, u_e]$ )
- $e \in U$  ( $x_e = u_e$ )
- $e \in L$  ( $x_e = l_e$ )

El algoritmo que se utiliza es similar al anterior, y lo llamaremos algoritmo **simplex para redes con capacidad acotada**.

---

**Algorithm 2** SimplexRedes( $G = (V, E), c, b, l, u$ )

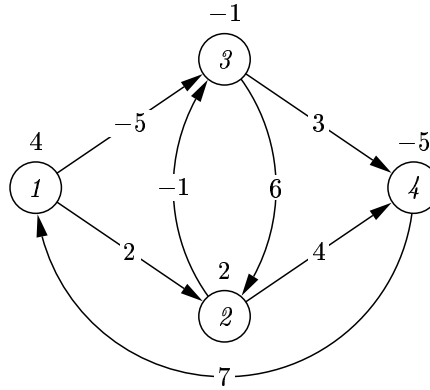
---

```
1: Encontrar árbol generador  $T$  (solución básica factible inicial) y conjuntos  $U$  y  $L$  de arcos no básicos que
   satisfacen  $x_e = l_e$  para  $e \in L$  y  $x_e = u_e$  para  $e \in U$ .
2: Calcular los flujos  $x_e$  con  $e \in T$  (flujos básicos).
3: Escoger  $u \in V$  arbitrario y asignar  $\pi_u = 0$ .
4: Encontrar el vector  $\pi$ , a partir de las ecuaciones  $c_{(u,v)} = \pi_u - \pi_v$  para cada  $(u, v) \in T$ .
5: Encontrar el vector  $\bar{c}$ , a partir de las ecuaciones  $\bar{c}_{(u,v)} = c_{(u,v)} - (\pi_u - \pi_v)$  para cada  $(u, v) \notin T$ .
6: while Existe un arco  $e = (u, v) \in L$  tal que  $\bar{c}_e < 0$  o Existe un arco  $e = (u, v) \in U$  tal que  $\bar{c}_e > 0$  do
7:   Identificar el único ciclo  $\mathcal{C}$  que se forma tras incorporar  $e$  a  $T$ .
8:   if ( $\mathcal{C}^- = \phi$  y  $e \in L$ ) o ( $\mathcal{C}^+ = \phi$  y  $e \in U$ ) then
9:     Parar.
10:  end if
11:   $\theta_1 = \min\{x_f - l_f : f \in \mathcal{C}^-\}$ 
12:   $\theta_2 = \min\{u_f - x_f : f \in \mathcal{C}^+\}$ 
13:   $\theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}$ 
14:  Encontrar un arco  $h \in \mathcal{C}^-$  tal que  $x_h - l_h = \theta$  o  $h \in \mathcal{C}^+$  tal que  $u_h - x_h = \theta$ .
15:  if  $e \in L$  then
16:    Asignar un flujo de  $+\theta$  a los arcos de  $\mathcal{C}^+$  incluido  $e$ , y  $-\theta$  a los arcos de  $\mathcal{C}^-$ .
17:  else  $e \in U$ 
18:    Asignar un flujo de  $-\theta$  a los arcos de  $\mathcal{C}^+$  incluido  $e$ , y  $+\theta$  a los arcos de  $\mathcal{C}^-$ .
19:  end if
20:   $T \leftarrow (T \setminus \{h\}) \cup \{e\}$ 
21:  Se actualizan los conjuntos  $L$  y  $U$ .
22:  Se actualizan los vectores  $\pi$  y  $\bar{c}$ .
23: end while
```

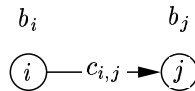
---

### 3. Problemas

**Problema 1** (Bazaraa, página 511). *Encontrar el flujo de costo mínimo en el siguiente grafo:*



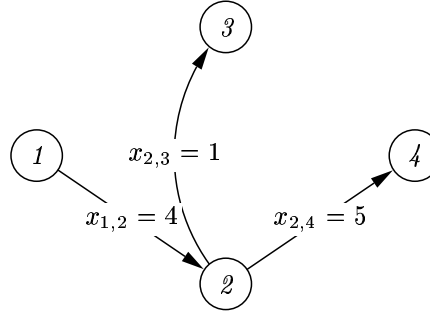
**Solución 1.** *En la figura anterior, los costos y la oferta/demanda se representan de la siguiente manera:*



*Revisemos cada paso del algoritmo:*

*Pasos 1 y 2 El primer paso es encontrar una solución factible. Al saturar los arcos de forma arbitraria (respetando*

las restricciones de positividad y demanda/oferta) se obtiene el flujo indicado en la figura (las variables que no aparecen valen cero).



El árbol generador en este caso es  $T = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$ .

Paso 3 Escogemos  $u = 4$ , tal que  $\pi_4 = 0$ .

Paso 4 Para encontrar el vector  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$  hay que resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \pi_1 - \pi_2 \\ c_{2,3} &= \pi_2 - \pi_3 \\ c_{2,4} &= \pi_2 - \pi_4 \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que  $\pi = (6, 4, 5, 0)$ .

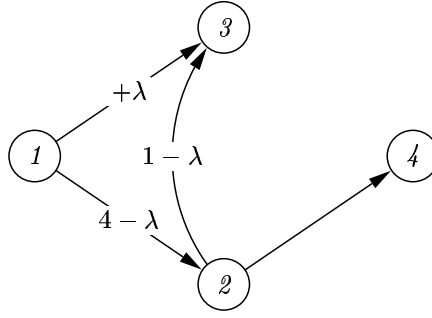
Paso 5 Para encontrar el vector  $\bar{c} = \{\bar{c}_{1,3}, \bar{c}_{3,2}, \bar{c}_{3,4}, \bar{c}_{4,1}\}$ , se deben resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{1,3} &= c_{1,3} - (\pi_1 - \pi_3) \\ &= -5 - (6 - 5) \\ &= -6 \\ \bar{c}_{3,2} &= c_{3,2} - (\pi_3 - \pi_2) \\ &= -1 - (5 - 4) \\ &= -2 \\ \bar{c}_{3,4} &= c_{3,4} - (\pi_3 - \pi_4) \\ &= 3 - (5 - 0) \\ &= -2 \\ \bar{c}_{4,1} &= c_{4,1} - (\pi_4 - \pi_1) \\ &= 7 - (0 - 6) \\ &= 13 \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que  $\bar{c} = (-6, -2, -2, 13)$ .

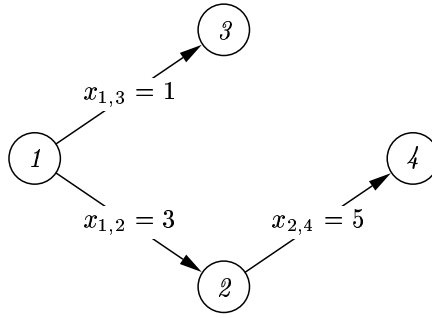
Iteración 1 Como existen 3 arcos no básicos (no están en  $T$ ) que cumplen  $\bar{c}_e < 0$ , escogemos alguno y comenzamos a iterar. Escogemos  $e = (1, 3)$  para entrar al árbol.

Pasos 8, 9 y 10 El ciclo que se forma agregando el arco  $(1, 3)$  a  $T$  es  $C = \{(1, 3), (2, 3), (1, 2)\}$ .



*Pasos 11 y 12 El valor de  $\lambda$  es el máximo que satisface  $4 - \lambda \geq 0$  y  $1 - \lambda \geq 0$  (o equivalentemente  $\lambda = \min\{4, 1\}$ ), luego  $\lambda = 1$ . El arco que sale del árbol es  $(2, 3)$ .*

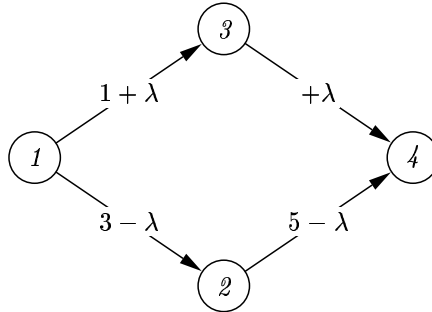
*Paso 13 El nuevo flujo es el siguiente:*



*Por lo tanto,  $\pi = \{6, 4, 11, 0\}$  y  $\bar{c} = \{\bar{c}_{2,3}, \bar{c}_{3,2}, \bar{c}_{3,4}, \bar{c}_{4,1}\} = \{6, -1, -8, 13\}$ .*

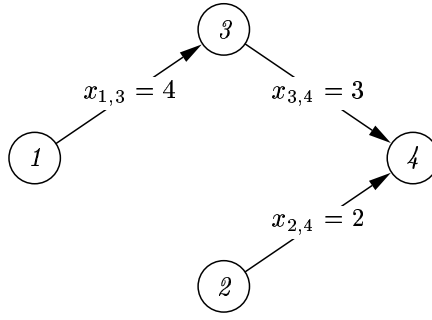
*Iteración 2 Los arcos no básicos que cumplen con  $\bar{c}_e < 0$  son  $(3, 2)$  y  $(3, 4)$ . Escogemos  $e = (3, 4)$  para entrar a  $T$ .*

*Pasos 8, 9 y 10 El ciclo que se forma agregando el arco  $(3, 4)$  a  $T$  es  $C = \{(1, 3), (3, 4), (2, 4), (1, 2)\}$ .*



*Pasos 11 y 12 El valor de  $\lambda$  es  $\lambda = \min\{3, 5\} = 3$ . El arco que sale del árbol es  $(1, 2)$ .*

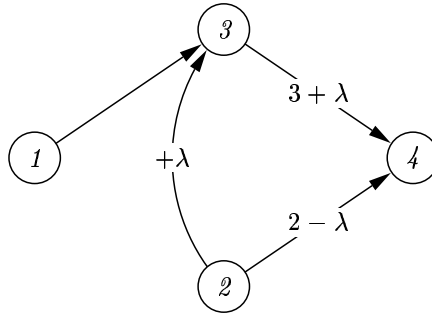
*Paso 13 El nuevo flujo es el siguiente:*



Por lo tanto  $\pi = \{-2, 4, 3, 0\}$  y  $\bar{c} = \{\bar{c}_{1,2}, \bar{c}_{2,3}, \bar{c}_{3,2}, \bar{c}_{4,1}\} = \{8, -2, 7, 5\}$ .

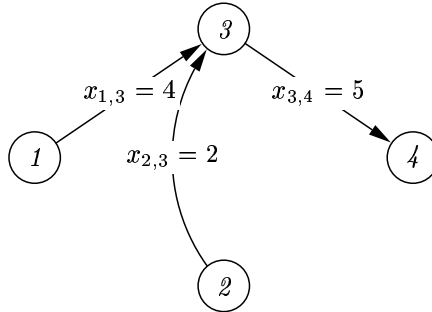
*Iteración 3* El único arco no básico que cumple con  $\bar{c}_e < 0$  es  $e = (2, 3)$ . Luego, escogemos  $e = (2, 3)$  para entrar al árbol.

*Pasos 8, 9 y 10* El ciclo que se forma agregando el arco  $(2, 3)$  a  $T$  es  $\mathcal{C} = \{(2, 3), (3, 4), (2, 4)\}$ .



*Pasos 11 y 12* El valor de  $\lambda$  es  $\lambda = \min\{2\} = 2$ . El arco que sale del árbol es  $(2, 4)$ .

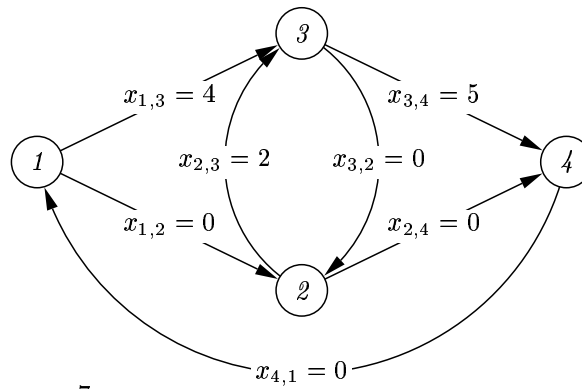
*Paso 13* El nuevo flujo es el siguiente:



Por lo tanto  $\pi = \{-2, 2, 3, 0\}$  y  $\bar{c} = \{\bar{c}_{1,2}, \bar{c}_{3,2}, \bar{c}_{2,4}, \bar{c}_{4,1}\} = \{6, 5, 2, 5\}$ .

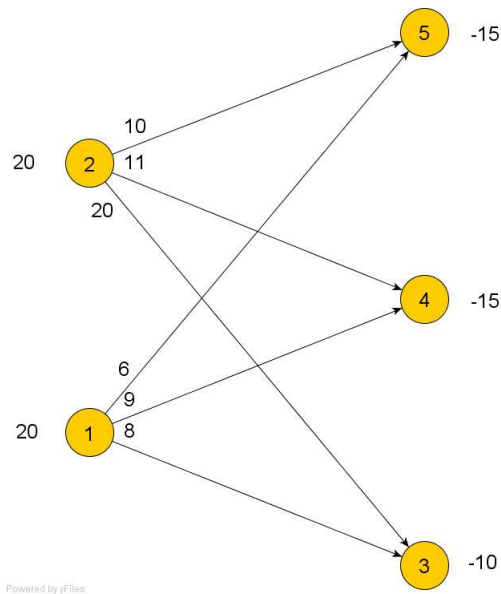
*Iteración 4* No hay arcos no básicos que cumplan  $\bar{c}_e < 0$ . Parar.

La solución óptima encontrada por el algoritmo es:



Y el valor de la función objetivo es  $-7$ .

**Problema 2.** Resuelva el problema de flujo a costo mínimo de la figura:

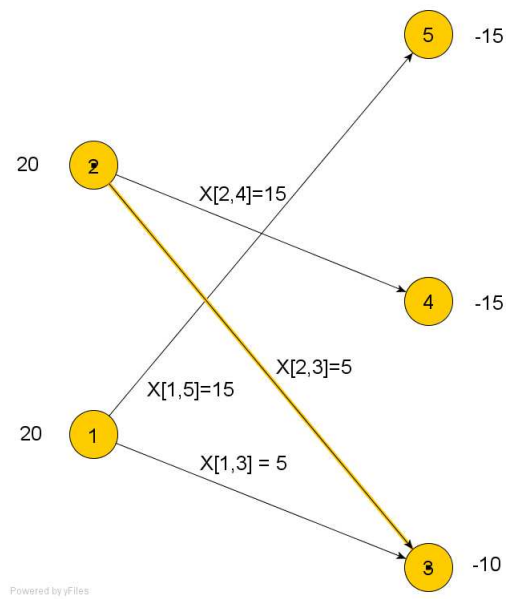


**Solución 2.** Se trata de un problema no acotado, pues en los arcos se especifican los costos de cada arco.

**Paso 1** Como se trata de un problema de transporte (existen dos conjuntos independientes de vertices), se puede utilizar el método de saturación a costo mínimo.

Se escoge en arco de menor costo y se satura. Si aún queda carga en el nodo desde donde parte el arco, se intenta saturar el siguiente arco de menor costo que parte en él. Se repite el proceso hasta construir un árbol generador con un flujo definido.

El resultado de la saturación se ve en la figura:



*Paso 3 Escogemos  $\pi_3 = 0$  arbitrariamente.*

*Paso 4 y 5*

$$\begin{aligned}
 c_{1,3} &= \pi_1 - \pi_3 \\
 \pi_1 &= 8 \\
 c_{1,5} &= \pi_1 - \pi_5 \\
 \pi_5 &= 2 \\
 c_{2,3} &= \pi_2 - \pi_3 \\
 \pi_2 &= 20 \\
 c_{2,4} &= \pi_2 - \pi_4 \\
 \pi_4 &= 9
 \end{aligned}$$

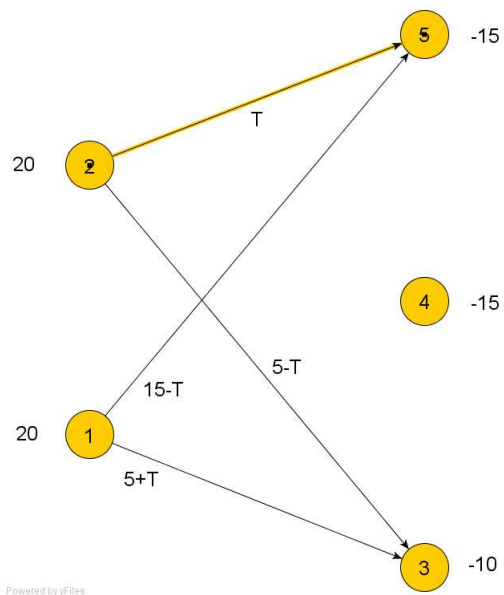
*Los costos no básicos reducidos:*

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_{2,5} &= c_{2,5} - (\pi_2 - \pi_5) \\
 &= -8 \\
 \bar{c}_{1,4} &= c_{1,4} - (\pi_1 - \pi_4) \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

*Paso 6 Entra a la iteración con  $e = (2, 5)$ , pues  $\bar{c}_{2,5} < 0$ .*

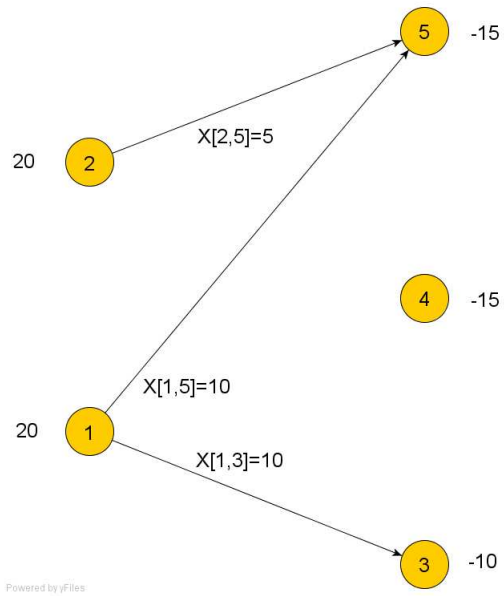
*Paso 7 y 8 El ciclo que se forma es  $\mathcal{C} = \{(2, 5), (1, 5), (1, 3), (2, 3)\}$  y además  $\mathcal{C}^- = \{(2, 3), (1, 5)\} \neq \emptyset$ .*





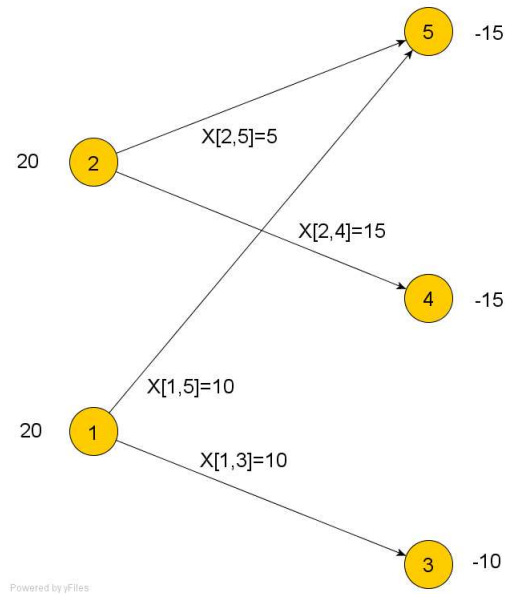
Pasos 11 y 12 Powered by yFiles

Paso 13 Se escoge  $T = \min\{5, 15\} = 5$  y el arco que sale es  $(2, 3)$ .



Powered by yFiles

Paso 14 El nuevo árbol generador es:



Paso 15 Al actualizar los valores de  $\pi$ , escogiendo  $\pi_3 = 0$ , se concluye que  $\bar{c} \geq 0$ .

Paso 6 Sale de la iteración. La solución es la que se encontró en el paso 14.

**Problema 3.** Se requiere estudiar el problema del abastecimiento de la isla de Chiloé. Más precisamente, el abastecimiento de las ciudades de Castro y Quellón (que demandan 150 y 50 tons. de insumos respectivamente) desde Puerto Montt. Para esto existen 2 alternativas de transporte: marítima y terrestre. Desde Pto. Montt se puede acceder a todos los puertos importantes de la isla: Ancud, Castro y Quellón. Mientras que en Ancud se puede contratar camiones para llevar parte de la carga a Castro y Quellón.

Debido a las dotaciones existentes de barcos y al difícil acceso, existen capacidades máximas de transporte iguales a 200 tons. entre Pto. Montt y Ancud, 100 tons. entre Pto. Montt y Castro y 50 tons. entre Pto. Montt y Quellón.

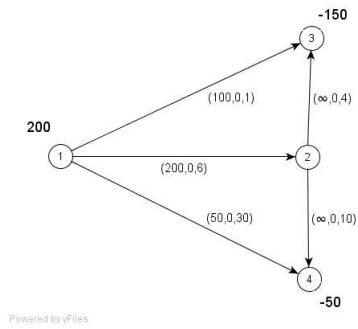
Los costos se detallan a continuación:

	Ancud	Castro	Quellón
Ancud (vía terrestre)	-	4	10
Pto. Montt (vía marítima)	6	1	30

Modele el problema como uno de flujo a costo mínimo y suponga que en estos momentos el abastecimiento se desglosa como sigue: 50 tons. de Pto. Montt a Ancud, 100 tons. de Pto. Montt a Castro, 50 tons. de Ancud a Castro y 50 tons. de Pto. Montt a Quellón. Pruebe que ese flujo es solución básica factible y encuentre la solución del problema a partir de lo anterior.

**Solución 3.** Como indicación, recuerde que en este caso debe dividir los arcos en 3 grupos,  $T, U$  (arcos no básicos que alcanzan su cota superior) y  $L$  (arcos no básicos que alcanzan su cota inferior). Para los arcos que no tienen cota superior, considere  $u_e = \infty$ .

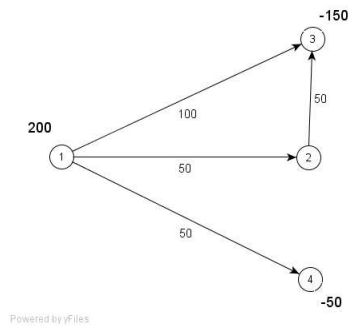
El esquema general con la notación  $(u, l, c)$  es el siguiente:



Las variables  $x_{ij}$  representan las toneladas de suministros desde la ciudad  $i$  a la ciudad  $j$ . Consideraremos:

- 1 : Puerto Montt
- 2 : Ancud
- 3 : Castro
- 4 : Quellón

Paso 1 y 2 La solución que nos dan en el enunciado es la siguiente:



Los conjuntos  $T, L, U$  son:

$$\begin{aligned} T &= \{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\} \\ L &= \{(2, 4)\} \\ U &= \{(1, 3)\} \end{aligned}$$

Paso 3 Escogemos  $\pi_4 = 0$ .

Paso 4

$$\begin{aligned} c_{1,4} &= \pi_1 - \pi_4 \\ 30 &= \pi_1 \\ c_{1,2} &= \pi_1 - \pi_4 \\ 6 &= 30 - \pi_4 \\ \pi_4 &= 24 \\ c_{2,3} &= \pi_2 - \pi_3 \\ 4 &= 24 - \pi_3 \\ \pi_3 &= 20 \end{aligned}$$

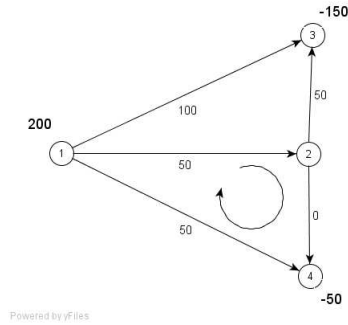
Paso 5

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_{1,3} &= c_{1,3} - (\pi_1 - \pi_3) \\
 &= 1 - (30 - 20) \\
 &= -9 \\
 \bar{c}_{2,4} &= c_{2,4} - (\pi_2 - \pi_4) \\
 &= 10 - (24 - 0) \\
 &= -14
 \end{aligned}$$

Se tiene que  $(1, 3) \in U$  y  $(2, 4) \in L$ .

Paso 6 Entra a la iteración. El arco  $(2, 4)$  entra a la base pues  $(2, 4) \in L$  y  $\bar{c}_{2,4} < 0$ .

Paso 7 El ciclo  $\mathcal{C}$  es el siguiente:



$$\mathcal{C} = \{(1, 2), (2, 4), (1, 4)\}.$$

Paso 8  $\mathcal{C}^+ = \{(1, 2), (2, 4)\}$ ,  $\mathcal{C}^- = \{(1, 4)\}$

Paso 11,12 y 13

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \min\{x_{1,4} - l_{1,4}\} \\
 &= 50 \\
 \theta_2 &= \min\{u_{1,2} - x_{1,2}, u_{2,4} - x_{2,4}\} \\
 &= \min\{200 - 50, \infty - 0\} \\
 &= 150 \\
 \theta &= \min\{\theta_1, \theta_2\} \\
 &= 50
 \end{aligned}$$

Paso 14  $h = (1, 4) \in L$ .

Paso 16 Se asigna flujo  $+\theta = 50$  a los arcos en  $\mathcal{C}^+ = \{(1, 2), (2, 4)\}$  y  $-50$  a los arcos en  $\mathcal{C}^- = \{(1, 4)\}$ .

Paso 20

$$T \leftarrow (\{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\} \setminus \{(1, 4)\}) \cup \{(2, 4)\}$$

Paso 21

$$\begin{aligned}
 L &= \{(1, 4)\} \\
 U &= \{(1, 3)\}
 \end{aligned}$$

Paso 22 Consideramos  $\pi_4 = 0$ .

$$\begin{aligned}
 c_{2,4} &= \pi_2 - \pi_4 \\
 10 &= \pi_2 - 0 \\
 c_{2,3} &= \pi_2 - \pi_3 \\
 4 &= 10 - \pi_3 \\
 \pi_3 &= 6 \\
 c_{1,2} &= \pi_1 - \pi_2 \\
 6 &= \pi_1 - 10 \\
 \pi_1 &= 16
 \end{aligned}$$

Los costos reducidos:

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_{1,4} &= c_{1,4} - (\pi_1 - \pi_4) \\
 &= 30 - (16 - 0) \\
 &= 14 \\
 \bar{c}_{1,3} &= c_{1,3} - (\pi_1 - \pi_3) \\
 &= 1 - (16 - 6) \\
 &= -9
 \end{aligned}$$

Se tiene que  $(1, 4) \in L$  y  $(1, 3) \in U$ .

Paso 6 No entra a la iteración.

La solución óptima es: 100 tons. desde Pto. Montt a Ancud, 100 tons. desde Pto. Montt a Castro, 50 tons. desde Ancud a Quellón y 50 tons. desde Ancud a Castro.

