MA37A Optimización
Análisis de Sensibilidad

Profesor: Héctor Ramírez
Auxiliares: Rodrigo López, Oscar Peredo

27 de septiembre de 2006

Una vez resuelto un problema en forma estandar $\min\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}$ se puede analizar que ocurre con la solución si varían ciertos parámetros del problema.
En todos los casos se asume que el cuadro óptimo es de la forma:

0	$\overline{c}_N^t$	$-z$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

1. Variación en coeficientes de función objetivo: c

Si $c \Rightarrow \tilde{c}$, se debe recalcular $\overline{c}_N^t$:

$$\overline{\tilde{c}}_N^t = \tilde{c}_N^t - \tilde{c}_B^t B^{-1} N$$

- Si $\overline{\tilde{c}}_N^t \geq 0$: La base óptima no cambia. La función objetivo toma el valor $\tilde{c}_B^t B^{-1} b$.
- Si $\overline{\tilde{c}}_N^t$ tiene una componente negativa: Iterar con simplex.

2. Variación en lado derecho: b

Si $b \Rightarrow \tilde{b}$, se debe recalcular $B^{-1}b$.

- Si $B^{-1}\tilde{b} \geq 0$: La solución es óptima aún. La función objetivo toma el valor $c_B^t B^{-1}\tilde{b}$.
- Si $B^{-1}\tilde{b}$ tiene una componente negativa: Iterar con simplex-dual.

3. Introducción de nueva variable

Se introduce la variable x_{n+1}, con coeficiente c_{n+1} y columna $A_{\cdot,n+1}$. El costo reducido de esa variable será:

$$\overline{c}_{n+1} = c_{n+1} - c_B^t B^{-1} A_{\cdot,n+1}$$

El cuadro asociado será:

0	$\overline{c}_N^t$	$c_{n+1} - c_B^t B^{-1} A_{\cdot,n+1}$	$-z$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}A_{\cdot,n+1}$	$B^{-1}b$

- Si $\overline{c}_{n+1} < 0$:
  - Si $B^{-1}A_{\cdot,n+1} \leq 0$: Se produce no-acotamiento.
  - Si $B^{-1}A_{\cdot,n+1}$ tiene alguna componente mayor a cero: Iterar con simplex.
- Si $\overline{c}_{n+1} \geq 0$: La solución sigue siendo óptima.

4. Introducción de nueva restricción

Se agrega la restricción $d^t x \leq d_0$ (o equivalentemente $d^t x + x_{n+1} = d_0$). El problema queda de la forma:

$$\text{mín}\left\{(c^t, 0) \cdot (x, x_{n+1}) : \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix}\right\}$$

Se agrega x_{n+1} a la base:

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^t & 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^t B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los costos reducidos y la función objetivo no cambian (¿porqué?). Solamente cambia $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$ y $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}\tilde{N} &= \tilde{B}^{-1}\begin{pmatrix} N \\ d_N^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}N \\ d_N^t - d_B^t B^{-1} N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}\tilde{b} &= \tilde{B}^{-1}\begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ d_0 - d_B^t B^{-1} b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Si $\tilde{B}^{-1}\tilde{b} \geq 0$: La solución es óptima aún. La función objetivo toma el valor $c_B^t \tilde{B}^{-1}\tilde{b}$.
- Si $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$ tiene una componente negativa: Iterar con simplex-dual.

5. Problemas

Problema 1 (Examen Primavera 2005). *Se desea encontrar una dieta a base de Fierro y Vitamina B, cuyo costo sea lo menor posible. Los requisitos mínimos de Fierro y Vitamina B son 21 mg. y 12 mg., respectivamente. Los alimentos que podrían formar esta dieta son huevos, papas, carne, leche y espinacas, cuyo aportes nutricionales se ven a continuación:*

Alimento (gr)	*Fierro (mg/gr)*	*Vit. B (mg/gr)*	*Precio (\$/gr)*
huevos	1	0	20
papas	0	1	10
carne	1	2	31
leche	1	1	11
espinacas	2	1	12

(a) *Formule este problema como uno de programaci'on lineal, y resuelva usando SIMPLEX.*

(b) *Calcule el costo marginal asociado a un cambio en los requisitos de Fierro y Vitamina B. Luego verifique, v'ia dualidad fuerte, que la soluci'on del problema es consumir solamente* 3 *gr. de leche,* 9 *gr. de espinacas.*

(c) *¿Cu'anto puede cambiar el costo de la leche para que las anteriores cantidades de leche y espinacas sigan siendo 'optimas?*

(d) *Suponga que el requerimiento de Fierro aumenta a 24 miligramos. ¿Es necesario cambiar la dieta? ¿y si disminuye a 12 mg?*

(e) *Ahora existe un nuevo requerimiento que debe satisfacer la dieta: "la cantidad m'inima de prote'inas debe ser de 80 mg." Encuentre la nueva dieta usando que el aporte proteico de cada alimento es:*

Alimento (gr)	*huevos*	*papas*	*carne*	*leche*	*espinacas*
Prote'inas (mg/gr)	1	3	0	8	6

Solución 1. *:*

(a) *El problema se modela de la forma:*

$$\begin{array}{lccc} \boldsymbol{min} & 20x_1 + 10x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5 & & \\ \boldsymbol{s.a} & x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 & \geq & 21 \\ & x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 & \geq & 12 \\ & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

El tableau inicial es:

20	10	31	11	12	0	0	0
1	0	1	1	2	-1	0	21
0	1	2	1	1	0	-1	12

Utilizando la solución básica factible $x^t = (0,0,1,0,10)$ *dada en la indicación (satisface las restricciones y hace* $B^{-1}b \geq 0$*, por eso es solución basica factible) se deduce que la base son las columnas 3 y 5.*

El tableau final, luego de fase I y II es:

19	0	10	0	0	1	10	-141
0,5	0	0,5	0,5	1	$-0{,}5$	0	10,5
$-0{,}5$	1	1,5	0,5	0	0,5	-1	1,5

Es decir, la solución es el vector $x^t = (0, 3/2, 0, 0, 21/2)$ *con f.o. de valor* 141.

(b) *Los costos marginales asociados al Fierro y la Vitamina B son* 1 *y* 10 *respectivamente (ver columna* `Dual value` *de la parte anterior, con los signos cambiados para concordancia).*
La solución propuesta, $\tilde{x}^t = (0,0,0,3,9)$ *satisface* $c^t\tilde{x} = 141$*. Como la solución encontrada por simplex tiene valor objetivo 141, por dualidad fuerte, ambas son soluciones óptimas.*

(c) *La base propuesta en la solución* $\tilde{x}^t = (0,0,0,3,9)$ *es no-degenerada (utiliza 2 columnas, la 4 y 5, y son l.i.). Luego, se tiene lo siguiente:*

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ B^{-1} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ N &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ B^{-1}N &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ B^{-1}b &= \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{c}_N^t &= c_N^t - c_B^t B^{-1} N \\
&= (20,10,31,0,0) - (11,12)\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= (19,0,10,1,10)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el tableau asociado a esta base es:

19	0	10	0	0	1	10	$*$
-1	2	3	1	0	1	-2	3
1	-1	-1	0	1	-1	1	9

(las columnas 4 y 5 son básicas). Consideremos $\tilde{c}^t = (20,10,31,11+\delta,12)$*, con* $\tilde{c}_B^t = (11+\delta,12)$*. El vector de costos reducidos asociado es:*

$$
\begin{aligned}
\overline{\tilde{c}}_N^t &= \tilde{c}_N^t - \tilde{c}_B^t B^{-1} N \\
&= (20,10,31,0,0) - (11+\delta,12)\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= (19+\delta,-2\delta,10-3\delta,1-\delta,10+2\delta)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si $\delta > 0$*, el costo reducido asociado a* x_2 *será negativo y la solución cambiará. Si* $\delta < 0$*, el menor valor que puede tomar de tal forma que ningún costo reducido sea negativo es* $\delta = -5$*. Es decir, el valor de la leche puede disminuir en 5 unidades sin alterar la solución* $\tilde{x}^t = (0,0,0,3,9)$.

(d) El vector b cambia a $\tilde{b} = (24,12)^t$*. Se debe recalcular* $B^{-1}\tilde{b}$*:*

$$
\begin{aligned}
B^{-1}\tilde{b} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la solución no cambia y no es necesario cambiar la dieta (no hay coordenadas negativa en el lado derecho).

Si $\tilde{b} = (12,12)^t$ *se tiene:*

$$
\begin{aligned}
B^{-1}\tilde{b} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la dieta tampoco cambia.

(e) Se agrega la restricción

$$x_1 + 3x_2 + 8x_4 + 6x_5 \geq 80$$

y el problema queda:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\textbf{\textit{min}} & 20x_1 & +10x_2 & +31x_3 & +11x_4 & +12x_5 & & \\
\textbf{\textit{s.a}} & x_1 & & +x_3 & +x_4 & +2x_5 & \geq & 21 \\
 & & x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & \geq & 12 \\
 & x_1 & +3x_2 & & +8x_4 & +6x_5 & \geq & 80 \\
 & & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}
$$

Se agrega una nueva variable de holgura s_3 y el problema queda de la forma:

$$\min\left\{(c^t,0)\cdot(x,s_3) : \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^t & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix}\right\}$$

con $x^t = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,s_1,s_2)$, $d^t = (1,3,0,8,6,0,0)$ *y* $d_0 = 80$.
Agregaremos la columna asociada a s_3 a la nueva base:

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^t & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para calcular la inversa, se debe modificar la fórmula presentada en la sección 4, pues en la celda (3,3) hay un -1:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ d_B^t B^{-1} & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 10 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculemos $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}\tilde{N} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ d_B^t B^{-1} & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} N \\ d_N^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}N \\ d_B^t B^{-1}N - d_N^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 7 & 18 & 2 & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculemos $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}\tilde{b} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ d_B^t B^{-1} & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ d_B^t B^{-1}b - d_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como la tercera coordenada de $\tilde{B}^{-1}\tilde{b}$ es negativa, se debe aplicar el algoritmo simplex-dual. Con la información anterior, el tableau inicial es el siguiente:

19	0	10	0	0	1	10	0	*
-1	2	3	1	0	1	-2	0	3
1	-1	-1	0	1	-1	1	0	9
-3	7	18	0	0	2	-10	1	-2

Simplex-dual nos dice que se debe pivotear en (3,8), pues $\max\{\frac{10}{-10}, \frac{19}{-3}\} = -1$*, asociado a la columna 8. Luego de pivotear, el tableau resultante y final es:*

16	7	28	0	0	3	0	1	$*$
−0,4	0,6	−0,6	1	0	0,6	0	−0,2	3,4
0,7	−0,3	0,8	0	1	−0,8	0	0,1	8,8
0,3	−0,7	−1,8	0	0	−0,2	1	−0,1	0,2

El valor de la función objetivo para esta solución es 143. La nueva dieta consiste en 3.4 gr. de leche y 8.8 gr. de espinacas.