MA37A Optimización
Dualidad

Profesor: Héctor Ramírez
Auxiliares: Rodirgo López, Oscar Peredo

4 de septiembre de 2006

1. Traspaso a Problema Dual

El problema primal (P) tiene como problema dual (D):

$$(P): \begin{array}{lrcl} \textbf{min} & cx & & \\ \textbf{s.a} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad (D): \begin{array}{lrcl} \textbf{max} & b^t y & & \\ \textbf{s.a} & A^t y & \leq & c^t \\ & y & \leq & 0 \end{array}$$

O equivalentemente:

$$(P'): \begin{array}{lrcl} \textbf{min} & cx & & \\ \textbf{s.a} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad (D'): \begin{array}{lrcl} \textbf{max} & b^t y & & \\ \textbf{s.a} & A^t y & \leq & c^t \\ & y & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

En el caso general, se tiene el siguiente cuadro:

minimización	maximización
Si la restricción es:	La variable es:
$\geq$	≥ 0
$\leq$	≤ 0
$=$	$\in \mathbb{R}$
Si la variable es:	La restricción es:
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
$\in \mathbb{R}$	$=$

Problema 1. *Calcule el dual del siguiente problema:*

$$\begin{array}{llllcl} \textbf{\textit{min}} & 4x_1 & +6x_2 & +2x_3 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \geq & 4 \\ & 4x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 5 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & & x_3 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Solución 1. *El dual es:*

$$\begin{array}{lllcl} \textbf{\textit{max}} & 4y_1 & +5y_2 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & 2y_1 & +4y_2 & \leq & 4 \\ & 3y_1 & +y_2 & \leq & 6 \\ & y_1 & -y_2 & = & 2 \\ & & y_1 & \geq & 0 \\ & & y_2 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Teorema 1 (Dualidad Débil). *Sea (P) un problema primal de maximización y (D) su dual, y consideremos x e y, puntos factibles de (P) y (D), respectivamente. Entonces $c^t x \leq b^t y$, es decir, la función objetivo del problema dual acota superiormente a la del primal.*

Corolario 1. *Sean x e y puntos factibles para (P) y (D) respectivamente. Si $c^t x = b^t y$, entonces son óptimos respectivos.*

Problema 2. *Considere (P) y (D) como se muestran a continuacion:*

$$\text{(P):}\quad \begin{array}{lrcl} \textbf{min} & cx & & \\ \textbf{s.a} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad\qquad \text{(D):}\quad \begin{array}{lrcl} \textbf{max} & b^t y & & \\ \textbf{s.a} & A^t y & \leq & c^t \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Llamando u al vector de holguras de (P) y s al vector de holguras de (D), demuestre que (x,u) y (y,s) factibles son óptimos de (P) y (D) respectivamente si y solo si $x_i s_i = 0, i = 1,...,n$ y $y_j u_j = 0, j = 1,...,m$.

Solución 2. *Doble implicancia:*

$\Rightarrow$ *Supongamos (x,u) y (y,s) factibles , son optimos de (P) y (D). Al agregarle variables de holgura a (P) y (D), se transforman en:*

$$\text{(P'):}\quad \begin{array}{lrcl} \textbf{min} & cx & & \\ \textbf{s.a} & Ax-u & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad\qquad \text{(D'):}\quad \begin{array}{lrcl} \textbf{max} & b^t y & & \\ \textbf{s.a} & A^t y + s & = & c^t \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

y los optimos son $(x, Ax-b)$ y $(y, c-A^t y)$ $(u = Ax-b, s = c-A^t y)$.
Se sabe que en el optimo se cumple la igualdad $c^t x = b^t y$, luego:

$$\begin{array}{rcl} c^t x & = & b^t y \\ (A^t y + s)^t x & = & (Ax-u)^t y \\ (A^t y)^t x + s^t x & = & (Ax)^t y - u^t y \\ s^t x & = & -u^t y \end{array}$$

Luego, como $x, y, s, u \geq 0$, se cumple que $-u^t y \leq 0$, por lo tanto $u^t y = s^t x = 0$.

$\Leftarrow$ *Como $x^t s = y^t u = 0$, se tiene que $x^t s + y^t u = 0$, es decir:*

$$\begin{array}{rcl} x^t s + y^t u & = & 0 \\ x^t(c - A^t y) + y^t(Ax-b) & = & 0 \\ x^t c - x^t A^t y + y^t Ax - y^t b & = & 0 \\ x^t c & = & y^t b \end{array}$$

Por el corolario de Dualidad Débil, se tiene el resultado.

2. Holguras Complementarias

Sea (P,D) un par primal-dual donde (P) esta en forma estandar. Si $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ son soluciones de (P) y (D) respectivamente, entonces:

$$\begin{array}{ll} (c_j - a_{\cdot,j}^t \tilde{y})\tilde{x}_j = 0 & \quad j = 1,...,n \\ (a_{i,\cdot}\tilde{x} - b_i)\tilde{y}_i = 0 & \quad i = 1,...,m \end{array}$$

Como consecuencia de esto, se tiene lo siguiente:

- Si $\tilde{x}_j > 0$, entonces la restriccion j del dual se cumple como igualdad (equivalentemente, la variable de holgura de esta restriccion es cero).

- Si $\tilde{y}_i > 0$, entonces la restriccion i del primal se cumple como igualdad (equivalentemente, la variable de holgura de esta restriccion es cero).
- Si la restriccion i del primal no se cumple como igualdad, entonces $\tilde{y}_i = 0$.
- Si la restriccion j del dual no se cumple como igualdad, entonces $\tilde{x}_j = 0$.

Problema 3. *Dado el siguiente sistema:*

$$\begin{array}{lrrrrrcl}
\boldsymbol{min} & 8x_1 & -9x_2 & +12x_3 & +4x_4 & +11x_5 & & \\
\boldsymbol{s.a} & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & +x_4 & +3x_5 & \leq & 1 \\
 & x_1 & +7x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 & \leq & 1 \\
 & 5x_1 & +4x_2 & -6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & \leq & 22 \\
 & & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}$$

Determine si el punto $x = (0, 2, 0, 7, 0)^t$ es solución óptima del problema.

Solución 3. *El punto x es solución factible (verificar).*

Como no se alcanza la igualdad en la segunda fila ($b_2 - a_{2,\cdot}^t x = 1$), por holgura complementaria, se sabe que el variable dual asociada a la segunda restricción es 0.

El dual del problema es:

$$\begin{array}{lrrrcl}
\boldsymbol{max} & y_1 & +y_2 & +22y_3 & & \\
\boldsymbol{s.a} & 2y_1 & +y_2 & +5y_3 & \leq & 8 \\
 & -3y_1 & +7y_2 & +4y_3 & \leq & -9 \\
 & 4y_1 & +3y_2 & -6y_3 & \leq & 12 \\
 & y_1 & -2y_2 & +2y_3 & \leq & 4 \\
 & 3y_1 & +y_2 & +3y_3 & \leq & 11 \\
 & & & y_i & \leq & 0
\end{array}$$

Además se sabe que si $x_j > 0$, la restricción j-esima del dual se alcanza con igualdad.

La información con la que contamos es la siguiente:

- $y_2 = 0$
- $-3y_1 + 7y_2 + 4y_3 = -9$
- $y_1 - 2y_2 + 2y_3 = 4$

Luego:

$$\begin{array}{rcl}
-3y_1 + 4y_3 & = & -9 \\
y_1 + 2y_3 & = & 4
\end{array}$$

Por lo tanto, $y_1 = \frac{17}{5}$ y $y_3 = \frac{3}{10}$. sin embargo, las variables duales deben satisfacer $y \leq 0$, luego, x ***no puede ser óptimo*** *pues no existe una variable dual que satisfaga las condiciones de Holgura Complementaria.*

3. Algoritmo Simplex-Dual

Algorithm 1 Simplex-Dual

1: Llevar el problema a la forma (tableau):

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \overline{c}_N^t & -C_B^t B^{-1} b \\ \hline I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{array}$$

con $\overline{c}_N^t \geq 0$.
2: **iteración**
3: **si** $B^{-1}b \geq 0$
4: El **óptimo** es $x = [B^{-1}b|0]$
5: **parar iteración**
6:
7: **si** $\exists (B^{-1}b)_r < 0$ y la fila correspondiente tiene solamente números positivos o ceros
8: El problema dual es **no acotado**, o el problema primal es **infactible**.
9: **parar iteración**
10:
11: **si** $\exists (B^{-1}b)_r < 0$ y la fila correspondiente tiene algún número menor que cero
12: Sobre la fila r, escoger la columna s tal que:

$$\frac{\overline{c}_s}{a_{r,s}} = \max_{a_{r,j}<0} \left\{ \frac{\overline{c}_j}{a_{r,j}} \right\}$$

13: Pivotear en (r, s).
14:
15: **fin iteración**

Problema 4. *Resuelva el siguiente problema usando el algortimo simplex-dual:*

$$\begin{array}{lrrrcl} \textbf{\textit{minimizar}} & 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \geq & 3 \\ & 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & \geq & 4 \\ & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Solución 4. *Como se pide minimizar, no es necesario hacer el cambio maximizar* $c^t x \Leftrightarrow -$*minimizar* $-c^t x$. *Poner el problema en forma canónica:* (x_4, x_5 *son variables de holgura)*

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

El problema ya se encuentra en la forma de la linea (1) y los costos reducidos son positivos. Comenzemos a iterar:

- *Iteración 1:*
  - *Se satisface condición de linea 11, para la fila 2 (escogimos el mas negativo).*
  - $\min_{a_{2,j}>0} \left\{ \frac{\overline{c}_j}{a_{2,j}} \right\} = \frac{\overline{c}_1}{a_{2,1}}$.
    Se pivotea en $(2, 1)$.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{ccccc|c}
0 & 4 & 1 & 0 & 1 & -4 \\
\hline
0 & -5/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & -1 \\
1 & -1/2 & 3/2 & 0 & -1/2 & 2
\end{array}$$

- *Iteración 2:*

  - *Se satisface condición de linea 11, para la fila 1.*
  - $\min_{a_{2,j}>0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{a_{2,j}} \right\} = \frac{\bar{c}_2}{a_{1,2}}$.
    Se pivotea en $(1,2)$.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 9/5 & 8/5 & 1/5 & -28/5 \\
\hline
0 & 1 & -1/5 & -2/5 & 1/5 & 2/5 \\
1 & 0 & 7/5 & -1/5 & -2/5 & 11/5
\end{array}$$

- *Iteración 3:*

  - *Se satisface condición de linea 3. El valor óptimo de la función objetivo es* $-28/5$ *y el vector solución es:*

$$\begin{aligned}
x_1 &= 11/5 \\
x_2 &= 2/5 \\
x_3 &= 0 \\
x_4 &= 0 \\
x_5 &= 0
\end{aligned}$$

  - *Parar iteración*

4. Interpretación Económica de la dualidad [Opcional]

Supongamos que un Comprador y un Productor se relacionan por medio de un pedido de produccion, el Comprador le encarga al Productor la creación de una cierta cantidad de productos, de diversos tipos.
Supongamos además, que el Comprador sabe todas las actividades que realiza el Productor para crear los productos finales.
Veamos que desde el punto de visto de maximizar ganacias o minimizar gastos, segun sea un Productor o un Consumidor, ambos buscan un objetivo común, resolviendo problemas duales (siempre que ambos cuenten con la misma información).

Escenario 1 (Problema del Comprador). *Un Comprador (en adelante C) contrata a una empresa (en adelante E) para que produzca* b_1 *articulos de tipo* 1*,* b_2 *articulos de tipo* 2*, ..., y* b_m *articulos de tipo* m *(hay* m *tipos de articulos a producir).*
Para la producción, E necesita realizar algunas de la n *actividades , por ejemplo, mano de obra especifica, estimación de costos de producción, etc. (tambien se pueden ver como los insumos).*
Cada actividad j *tiene asociado un costo unitario* c_j*, es decir, si utiliza la actividad* j *para producir una cantidad* x *de algun articulo, se debe contabilizar el costo de esa actividad como* xc_j*.*
Si a_{ij} *representa la cantidad del articulo* i *generada por una unidad de la actividad* j*, entonces el total de unidades del articulo* i *generados por todas las actividades es*

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

donde x_j representa la cantidad de unidades de la actividad j que se utilizaron en la producción total. Además, como C exige que se produzcan b_i articulos de tipo i, se debe cumplir que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad \geq \quad b_i$$

para $i = 1, ...m$.

El problema que debe resolver C consiste en minimizar las actividades que realiza E con tal de que produzca las cantidades solicitadas (puede entenderse como un "fiscalizador"). De esta manera, C verifica que efectivamente E utiliza la menor cantidad de actividades posibles y E no le cobrará demás al momento de pagar:

$$\begin{array}{lrcll} \textbf{\textit{minimizar}} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & b_i & i = 1...m \\ & x_j & \geq & 0 & \end{array}$$

Escenario 2 (Problema del Productor). *El objetivo del Productor es maximizar sus ganancias utilizando la menor cantidad de actividades posibles para realizar los productos pedidos por el Comprador. Las cantidades que C pidio son $b_1, ..., b_m$. Si $w_1, ..., w_m$ son los precios por unidad de cada articulo respectivamente, la función que debe maximizar E es:*

$$\sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

Como a_{ij} es la cantidad de articulos de tipo i generados por una unidad de la actividad j, $a_{ij}w_i$ representa el precio de la cantidad de articulos de tipo i generado por una unidad de la actividad j (costo unitario de la actividad j). Con lo anterior, el precio de los productos producidos por una unidad de la actividad j se calcula como:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$$

Como el costo unitario de la actividad j es c_j, la empresa no puede asignar un costo unitario mayor, pues de hacerlo, el precio que estará cobrando al Comprador será más caro que alguna otra empresa que asigna costo unitario igual a c_j y el Productor perdería al cliente. Es decir, c_j acota superiormente al costo unitario asignado por el Productor:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \quad \leq \quad c_j$$

para $j = 1, ..., n$. El problema que debe resolver E consiste en maximizar sus ganancias, calculando el costo unitario de sus actividades en base a la informacion de los a_{ij} y fijandolo menor o igual al costo unitario de actividades, c_j, dado por el mercado:

$$\begin{array}{lrcll} \textbf{\textit{maximizar}} & \sum_{i=1}^{m} b_i w_i & & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i & \leq & c_j & j = 1...n \\ & w_i & \geq & 0 & \end{array}$$