

MA37A Optimización

Administración de un Portafolio de Inversiones a largo plazo

Profesor: Héctor Ramírez
Auxiliares: Rodrigo López, Oscar Peredo

4 de septiembre de 2006

1. Problema

Problema 1. Nos interesa administrar un portafolio de inversiones durante un período de 6 años. El capital inicial son US\$ 1000, y se puede invertir en lo siguiente:

- Cuenta de Ahorros X , ganancia de 5 % anual.
- Fondos Mutuos Y , ganancia de 12 % comprando la primera vez y 11 % las veces siguientes. Se debe esperar 2 años para obtener ganancias.
- Fondos Mutuos Z , ganancia de 18 %. Se debe esperar 3 años para obtener ganancias.
- Fondos Mutuos W , ganancia de 24 %. Se debe esperar 4 años para obtener ganancias.

Como restricción, se impone que se puede invertir en los Fondos Mutuos Y en cualquier año salvo el tercero, en los Fondos Mutuos Z cualquier año salvo el primero y en los Fondos Mutuos W sólo una vez en el primer año.

Resuelva el problema de la administración de este portafolio usando las variables x_t que representa la inversión al año t en la acción X , y similarmente y_t, z_t y w_t .

Por ejemplo, en la figura 1 se presenta una posible administración de las inversiones:

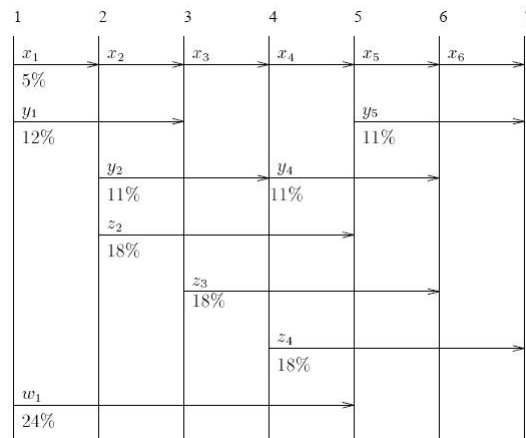


Figura 1: Administración de Portafolio

Calcule el dual del problema. Resuelvalo. Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Como varían las ganancias si se decide que el capital inicial serán US\$ 1500?

- Solución 1.** Se introduce una variable v que representa el valor de las inversiones al final del sexto año. El modelo se obtiene calculando las posibles ganancias al principio de cada año, donde el capital en el año 1 es igual al capital inicial (1000) y el capital en el año i es igual a la ganancia esperada según los datos del problema para los montos invertidos el año anterior.

max	v							
s.a	x_1	$+y_1$		$+w_1$	$=$	1000		<i>Principio Año 1</i>
	x_2	$+y_2$	$+z_2$		$=$	$1,05x_1$		<i>Principio Año 2</i>
	x_3		$+z_3$		$=$	$1,05x_2 + 1,12y_1$		<i>Principio Año 3</i>
	x_4	$+y_4$	$+z_4$		$=$	$1,05x_3 + 1,11y_2$		<i>Principio Año 4</i>
	x_5	$+y_5$			$=$	$1,05x_4$	$+1,18z_2 + 1,24w_1$	<i>Principio Año 5</i>
	x_6				$=$	$1,05x_5 + 1,11y_4 + 1,18z_3$		<i>Principio Año 6</i>
	v				$=$	$1,05x_6 + 1,11y_5 + 1,18z_4$		<i>Final Año 6</i>
	$x_t,$	$y_t,$	$z_t,$	w_t, v	\geq	0		

[illegible]

$$b^t = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tras aplicar Simplex Fase I y II, se obtiene la solución de este problema:

2

Algorithm 1 Simplex Fase I

- 1: $\triangleright A$ matriz de m filas y n columnas
2: Escribir el problema en forma estandar (introduciendo variables de holgura si es necesario):

$$\min c^t x \quad \text{s.a } Ax = b, x \geq 0$$

- 3: Plantear problema de factibilidad (introduciendo variables artificiales $x_a^t = (x_{a_1}, \dots, x_{a_m})$) (el simbolo 1_m^t representa al vector de m 1's y $diag(x)$ representa la matriz con ceros y en su diagonal el vector x):

$$\min \sum_{i=1}^m x_{a_i} \quad \text{s.a } Ax + diag(x_a) = b, \quad x, x_a \geq 0$$

- 4: $\tilde{A} = [I|A]$, con I matriz identidad de $m \times m$ ($I = B, A = N$) \triangleright Notar que \tilde{A} es una matriz de m filas y $m + n$ columnas
5: Anular los 1's que aparecen en los costos de las variables artificiales.
6: Resolver usando Simplex Fase II el sistema que aparece:

$$\begin{array}{cc|c} -1_m^t A & 0^t & -1_m^t b \\ \hline A & I & b \end{array}$$

- 7: Se debe pivotar hasta sacar a las variables artificiales de la base trivial (la identidad).
8: Las columnas donde haya quedado la identidad conforman una solución básica factible inicial (una base que puede ser utilizada por la fase II).
-

2. Algoritmos

Comentarios:

1. $Ax = Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$
2. Si $\bar{c}_N \geq 0$, entonces $x_N \geq 0$ y la funcion objetivo crece, el objetivo es hacer igual a cero los costos reducidos

Algorithm 2 Simplex Fase II

1: Escribir el problema en forma estandar (introduciendo variables de holgura si es necesario):

$$\min c^t x \quad \text{s.a. } Ax = b, x \geq 0$$

2: $A = [B|N]$, con B matriz de $n \times n$ invertible (base)

3: $c = [c_B|c_N]$, $x = [x_B|x_N]$

4: Considerar nuevo problema:

▷ Ver Comentario 1

$$\begin{aligned} \min \quad & (c_N^t - c_B^t B^{-1} N) x_N + c_B^t B^{-1} b \\ \text{s.a.} \quad & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_N \geq 0 \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

5: Vector de costos reducidos: $\bar{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N$

▷ Ver Comentario 2

6: Un punto extremo del poliedro sera $x = [x_B|x_N] = [B^{-1}b|0]$

7: El problema se puede ver de la forma (tableau):

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \bar{c}_N^t & -C_B^t B^{-1} b \\ \hline I & B^{-1} N & B^{-1} b \end{array}$$

8: **iteración**

9: **si** $\bar{c}_N^t \geq 0$

10: El **óptimo** es $x = [B^{-1}b|0]$

11: **parar iteración**

12:

13: **si** $\exists (\bar{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene solamente números negativos o ceros

14: El problema es **no acotado**

15: **parar iteración**

16:

17: **si** $\exists (\bar{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene algún número mayor que cero

18: Si x_s es la variable de la columna respectiva, se le hace entrar a la base, sacando x_r , con r (en el contexto de la base) tal que:

$$\frac{b_r}{a_{r,s}} = \min_{a_{i,s} > 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{i,s}} \right\}$$

19: Pivotear en (r, s) para sacar x_r e ingresar x_s

20:

21: **fin iteración**
