

MA37A Optimización

Algoritmo Simplex

Profesor: Héctor Ramírez
Auxiliares: Rodrigo López, Oscar Peredo

22 de Agosto del 2006

Algorithm 1 Simplex Fase II

1: Escribir el problema en forma estandar (introduciendo variables de holgura si es necesario):

$$\min c^t x \quad \text{s.a. } Ax = b, x \geq 0$$

2: $A = [B|N]$, con B matriz de $n \times n$ invertible (base)

3: $c = [c_B|c_N]$, $x = [x_B|x_N]$

4: Considerar nuevo problema:

▷ Ver Comentario 1

$$\begin{aligned} \min \quad & (c_N^t - c_B^t B^{-1} N) x_N + c_B^t B^{-1} b \\ \text{s.a.} \quad & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_N \geq 0 \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

5: Vector de costos reducidos: $\bar{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N$

▷ Ver Comentario 2

6: Un punto extremo del poliedro sera $x = [x_B|x_N] = [B^{-1}b|0]$

7: El problema se puede ver de la forma (tableau):

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \bar{c}_N^t & -C_B^t B^{-1} b \\ I & B^{-1} N & B^{-1} b \end{array}$$

8: **iteración**

9: **si** $\bar{c}_N^t \geq 0$

10: El **óptimo** es $x = [B^{-1}b|0]$

11: **parar iteración**

12:

13: **si** $\exists (\bar{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene solamente números negativos o ceros

14: El problema es **no acotado**

15: **parar iteración**

16:

17: **si** $\exists (\bar{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene algún número mayor que cero

18: Si x_s es la variable de la columna respectiva, se le hace entrar a la base, sacando x_r , con r (en el contexto de la base) tal que:

$$\frac{b_r}{a_{r,s}} = \min_{a_{i,s} > 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{i,s}} \right\}$$

19: Pivotear en (r, s) para sacar x_r e ingresar x_s

20:

21: **fin iteración**

Comentarios:

1. $Ax = Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$
2. Si $\bar{c}_N^t \geq 0$, entonces $x_N \geq 0$ y la función objetivo crece, el objetivo es hacer igual a cero los costos reducidos

Problema 1. Resolver el siguiente problema usando el método simplex:

$$\begin{array}{llll}
 \text{minimizar} & x_1 & +x_2 & -4x_3 \\
 \text{s.a} & x_1 & +x_2 & +2x_3 \leq 9 \\
 & x_1 & +x_2 & -x_3 \leq 2 \\
 & -x_1 & +x_2 & +x_3 \leq 4 \\
 & & & x_i \geq 0
 \end{array}$$

Solución 1. Como se pide minimizar, no es necesario hacer el cambio maximizar $c^t x \Leftrightarrow -\text{minimizar } -c^t x$. Poner el problema en forma estándar: (x_4, x_5, x_6 son variables de holgura)

$$\begin{array}{cccccc|c}
 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 9 \\
 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
 -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4
 \end{array}$$

El problema ya se encuentra en la forma:

$$\begin{array}{cc|c}
 0 & \bar{c}_N^t & -C_B^t B^{-1}b \\
 I & B^{-1}N & B^{-1}b
 \end{array}$$

Comenzamos a iterar:

■ Iteración 1:

- Se satisface condición de línea 17, para la columna 3. Entra x_3 a la base.
- $\min_{a_{i,3} > 0} \left\{ \frac{b_3}{a_{i,3}} \right\} = \frac{b_3}{a_{3,3}}$.
Se pivotea en (3,3).
Sale la variable básica asociada a la tercera coordenada: x_6 .
- Tableau:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 -3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 4 & -16 \\
 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
 -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4
 \end{array}$$

■ Iteración 2:

- Se satisface condición de línea 17, para la columna 1. Entra x_1 a la base.
- $\min_{a_{i,1} > 0} \left\{ \frac{b_1}{a_{i,1}} \right\} = \frac{b_1}{a_{1,1}}$.
Se pivotea en (1,1).
Sale la variable básica asociada a la primera coordenada: x_4 .
- Tableau:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & -17 \\
 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1/3 \\
 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
 0 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 13/3
 \end{array}$$

■ Iteración 3:

- Se satisface condición de línea 9. El valor óptimo de la función objetivo es -17 y el vector solución es:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1/3 \\x_2 &= 0 \\x_3 &= 13/3\end{aligned}$$

- Parar iteración

Problema 2. Resolver el siguiente problema usando el método simplex:

$$\begin{array}{llllll} \text{maximizar} & 3x_1 & 2x_2 & x_3 & & \\ \text{s.a} & 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \leq & 3 \\ & -x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 5 \\ & & & & x_i & \geq 0 \end{array}$$

Solución 2. Como se pide maximizar, es necesario hacer el cambio maximizar $c^t x \Leftrightarrow -\text{minimizar } -c^t x$. Poner el problema en forma canónica: (x_4, x_5 son variables de holgura)

$$\begin{array}{cccccc|c} -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}$$

Comenzemos a iterar:

■ Iteración 1:

- Se satisface condición de línea 17, para la columna 1. Entra x_1 a la base.
- $\min_{a_{i,1} > 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{i,1}} \right\} = \frac{b_1}{a_{1,1}}$.
Se pivotea en $(1, 1)$.
Sale la variable básica asociada a la primera coordenada: x_4 .
- Tableau:

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & -13/2 & -2 & 3/2 & 0 & 0 & 9/2 \\ 1 & -3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & 2 & 1/2 & 1 & 0 & 13/2 \end{array}$$

■ Iteración 2:

- Se satisface condición de línea 13, para la columna 2.
- El problema es no acotado.

Problema 3. Resolver el siguiente problema usando fase I y II de Simplex:

$$\begin{array}{llllll} \text{minimizar} & 4x_1 & -x_2 & & & \\ \text{s.a} & x_1 & -2x_2 & \leq & 3 & \\ & x_1 & +x_2 & \geq & 1 & \\ & -3x_1 & +x_2 & \leq & 3 & \\ & & x_1 & \geq & 0 & \end{array}$$

Algorithm 2 Simplex Fase I

- 1: ▷ A matriz de m filas y n columnas
2: Escribir el problema en forma canónica (introduciendo variables de holgura si es necesario):

$$\min c^t x \quad \text{s.a. } Ax = b, x \geq 0$$

- 3: Plantear problema de factibilidad (introduciendo variables artificiales $x_a^t = (x_{a_1}, \dots, x_{a_m})$) (el simbolo 1_m^t representa al vector de m 1's y $diag(x)$ representa la matriz con ceros y en su diagonal el vector x):

$$\min \sum_{i=1}^m x_{a_i} \quad \text{s.a. } Ax + diag(x_a) = b, \quad x, x_a \geq 0$$

- 4: $\tilde{A} = [I|A]$, con I matriz identidad de $m \times m$ ($I = B, A = N$) ▷ Notar que \tilde{A} es una matriz de m filas y $m + n$ columnas
5: Anular los 1's que aparecen en los costos de las variables artificiales.
6: Resolver usando Simplex Fase II el sistema que aparece:

$$\begin{array}{cc|c} -1_m^t A & 0^t & -1_m^t b \\ \hline A & I & b \end{array}$$

- 7: Se debe pivotar hasta sacar a las variables artificiales de la base trivial (la identidad).
8: Las columnas donde haya quedado la identidad conforman una solución básica factible inicial (una base que puede ser utilizada por la fase II).
-

Solución 3. Hay que llevar el problema a su forma estandar:

$$\begin{array}{llllllll} \text{minimizar} & 4x_1 & -u_2 & +u_3 & & & & \\ \text{s.a} & x_1 & -2u_2 & +2u_3 & +x_3 & & & = 3 \\ & x_1 & +u_2 & -u_3 & & -x_4 & & = 1 \\ & -3x_1 & +u_2 & -u_3 & & & +x_5 & = 3 \\ & x_1 & , u_2 & , u_3 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Como no se dispone de una base factible se debe resolver fase I (B es base factible si está formada por columnas l.i. y $B^{-1}b \geq 0$).

Agregamos vars. artificiales y cambiamos la función a minimizar:

$$\begin{array}{llllllllll} \text{minimizar} & & & & & & & x_{a_1} & +x_{a_2} & +x_{a_3} \\ \text{s.a} & x_1 & -2u_2 & +2u_3 & +x_3 & & & x_{a_1} & & = 3 \\ & x_1 & +u_2 & -u_3 & & -x_4 & & & +x_{a_2} & = 1 \\ & -3x_1 & +u_2 & -u_3 & & & +x_5 & & & +x_{a_3} = 3 \\ & x_1 & , u_2 & , u_3 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & , x_{a_1} & , x_{a_2} & , x_{a_3} \geq 0 \end{array}$$

La tabla para esta fase es la siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Al anular los 1's de los costos de las vars. artificiales, se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ \hline 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Al aplicar fase II al cuadro anterior, se obtiene:

$$\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
-5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 9 \\
-3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
-4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2
\end{array}$$

(pivoteando en (1,4), (2,2) y (3,5)). Con esto, la base factible que nos entrega la fase I son las columnas a_4, a_2 y a_5 .

Ahora, aplicando la fase II al cuadro del problema original:

$$\begin{array}{cccccc|c}
4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
-3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{array}$$

Se llega al siguiente cuadro:

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\
-5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 9 \\
-3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
-4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{array}$$

(¿coincide con el cuadro final de la fase I?) Como no hay costos no básicos reducidos negativos, se detiene la fase II. El punto extremo óptimo es $\tilde{x} = (0, 3, 0, 9, 2, 0)$, con valor objetivo $z = -3$. Llevando el punto óptimo al problema original (no en la forma estándar), se tiene que $x = (0, 3)$ es el óptimo con valor objetivo $z = -3$.

OBSERVACION: lo único que cambió entre el cuadro final de la fase I y el cuadro final de la fase II para la base encontrada en fase I fueron los costos no básicos reducidos. La manera de calcularlos de forma directa, contando con $B^{-1}N$ (las columnas que no están en la base en el cuadro final de fase II o las columnas que no están en la base ni están asociadas a vars. artificiales en el cuadro final de fase I), es la siguiente:

$$\bar{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1}N$$

En este caso:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_N^t &= (\text{columna}_1, \text{columna}_3, \text{columna}_6) \\
\bar{c}_N^t &= (4, 1, 0) - (0, -1, 0) \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (4, 1, 0) - (3, 1, -1) \\
&= (1, 0, 1)
\end{aligned}$$

Las filas de $B^{-1}N$ deben ser análogas a las columnas de la base (o del vector c_B^t).