

## VARIABLE COMPLEJA Y FUNCIONES ESPECIALES

JUAN DÁVILA – MAURICIO DUARTE

### 1. SOBRE LA CLASE AUXILIAR DE HOY – 13 11 06

Terminamos la clase auxiliar de hoy con la fórmula siguiente:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\pi \frac{\cot(i\pi a)}{ia}.$$

Desarrollando esta expresión:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\pi \frac{e^{i\pi ia} + e^{-i\pi ia}}{e^{i\pi ia} - e^{-i\pi ia}} i \frac{1}{ia} = \frac{\pi}{a} \frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} = \frac{\pi \cosh(\pi a)}{a \sinh(\pi a)}.$$

Manipulando la sumatoria tenemos que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

Juntando esto con lo anterior se deduce que:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi \cosh(\pi a)}{a \sinh(\pi a)} - \frac{1}{a^2}.$$

Luego, haciendo  $a \rightarrow 0$  y aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi \cosh(\pi a)}{a \sinh(\pi a)} - \frac{1}{a^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi a \cosh(\pi a) - \sinh(\pi a)}{a^2 \sinh(\pi a)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi^2 a \sinh(\pi a)}{2a \sinh(\pi a) + \pi a^2 \cosh(\pi a)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi^2 \sinh(\pi a)}{2 \sinh(\pi a) + \pi a \cosh(\pi a)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi^3 \cosh(\pi a)}{2\pi \cosh(\pi a) + \pi \cosh(\pi a) + \pi^2 a \sinh(\pi a)} \\ &= \frac{\pi^3}{3\pi} \end{aligned}$$

Se obtiene finalmente la igualdad  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .