

## Guía 7

### MA36A - Variable Compleja y Funciones Especiales

3 de noviembre de 2006

Prof.: J. Dávila

Aux.: M. Duarte

1. Sea  $D \subset \mathbb{C}$  un dominio acotado y  $(f_n)$  una sucesión de funciones continuas en  $\overline{D}$  y holomorfas en  $D$ , convergente uniformemente sobre  $\partial D$ . Pruebe que  $f_n$  converge uniformemente sobre  $D$ .
2. Sea  $B = \{z : |z - z_0| < r\}$  y  $(f_n)$  una sucesión de funciones continuas en  $\overline{B}$  y holomorfas en  $B$ . Suponga que existe  $\varphi : \partial B \rightarrow \mathbb{C}$  continua tal que  $f_n(z) \rightarrow \varphi(z)$  para todo  $z \in \partial B$  y  $\int_{\partial B} |f_n - \varphi| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Pruebe que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre compactos de  $B$  donde  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw$ .
3. Verifique que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (z^2 + n^2)^{-1}$  converge uniformemente sobre compactos de  $\mathbb{C} \setminus \{ki : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$ . Denotemos por  $f$  su suma. Pruebe que  $\int_{|z|=r} f(z) dz = 0$  para  $r > 0$  no entero, y que

$$\int_{|z-ik|=r} f(z) dz = \pi \sum_{|k-r| < n < |k+r|} \frac{1}{n}.$$

4. Sean  $c > 0$  y  $\lambda \geq 0$  constantes y  $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ . Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones holomorfas en  $\Delta$  tal que  $f_n(0) = 0$  y  $|f'_n(z)| \leq c(1 - |z|)^{-\lambda}$  para todo  $n$ . Pruebe que  $(f_n)$  tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de  $\Delta$ .
5. Sea  $c > 0$ ,  $\Delta = \{z : |z| < 1\}$  y  $(f_n)$  una sucesión de funciones holomorfas en  $\Delta$  tal que para todo  $n$  los coeficientes de Taylor de  $f_n$   $a_{k,n} = f_n^{(k)}(0)/k!$  satisfacen  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k,n}|^2 \leq c$ . Pruebe que  $(f_n)$  tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de  $\Delta$ .
6. Sea  $c > 0$ ,  $\Delta = \{z : |z| < 1\}$  y  $(f_n)$  una sucesión de funciones holomorfas en  $\Delta$  tal que para todo  $n$  y todo  $0 < r < 1$   $\int_{|z|<r} |f_n|^2 \leq c$ . Pruebe que  $(f_n)$  tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de  $\Delta$ .
7. Muestre que

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}.$$

Ind.: puede utilizar la fórmula

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

8. Pruebe

a)

$$\pi \tan(\pi z) = -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2z - 2n + 1} + \frac{1}{2n - 1}$$

y b)

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{|n| \geq 1} (-1)^n \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Ind.: en b) puede utilizar la identidad  $2 \csc(w) = \tan(w/2) + \cot(w/2)$ .