

Guía 6

MA36A - Variable Compleja y Funciones Especiales

3 de noviembre de 2006

Prof.: J. Dávila

Aux.: M. Duarte

1. Para $n = 1, 2, \dots$ sea $f_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$. Pruebe que si $R > 0$ existe $N(R)$ tal que f_n no tiene ceros en B_R para todo $n \geq N(R)$.

2. Sea $f : B_R(z_0^2) \setminus \{z_0^2\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con un polo en $z_0^2 \neq 0$, y $g(z) = f(z^2)z$. Muestre que g tiene un polo en z_0 y que

$$\text{Res}(g, z_0) = \frac{1}{2} \text{Res}(f, z_0^2).$$

3. Verificar que para $0 < \alpha < 1$

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2 \cos(\alpha\pi/2)}.$$

4. Probar que si $0 < \alpha < 1$ y $b > 0$ entonces

a)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(x+b)} = \frac{\pi}{b^\alpha \sin(\alpha\pi)},$$

b)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(x+b)^2} = \frac{\alpha\pi}{b^{\alpha+1} \sin(\alpha\pi)},$$

c)

$$\int_0^\infty \frac{\log x dx}{x^\alpha(x+b)} = \frac{\pi(\pi \cot(\alpha\pi) + \log b)}{b^\alpha \sin(\alpha\pi)},$$