Guía 5

MA36A - Variable Compleja y Funciones Especiales

3 de noviembre de 2006 Prof.: J. Dávila

Aux.: M. Duarte

1. Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que $|f(z)| = 1$ para todo $|z| = 1$. Demuestre que f tiene la forma

$$f(z) = c\prod_{k=1}^{r}\Big(\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}\Big)^{m_k}\prod_{l=1}^{s}\Big(\frac{1-\bar{b}_l z}{z-b_l}\Big)^{n_l},$$

donde $a_1,\ldots,a_r$ son los ceros y $b_1,\ldots,b_l$ son los polos de f (con órdenes $m_1,\ldots,m_r$ y $n_1,\ldots,n_s$ respectivamente) en el disco $\{|z|<1\}$ y $|c| = 1$.

2. Determine la serie de Laurent de f en el anillo indicado:

a) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $A = \{1 < |z-2i| < 3\}$, b) $f(z) = \frac{e^{z^2}-1}{z^4}$, $A = \{0 < |z| < \infty\}$,

c) $f(z) = \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z-1)^2}$, $A = \{0 < |z-1| < 1\}$, d) $f(z) = \frac{1}{z^2-4z}$, $A = \{3 < |z-3i| < 5\}$.

3. Sea $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante. Demuestre que si g tiene una singularidad aislada esencial en $w_0 = f(z_0)$ entonces $g\circ f$ también posee una singularidad esencial en z_0.

4. Sea $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ si $z \neq 0$ y $f(0) = 1$. Compruebe que f es meromorfa en $\mathbb{C}$ y encuentre sus polos. Muestre que la serie de Taylor de f en torno a cero tiene la forma

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}B_n z^{2n},$$

donde $B_1, B_2, \ldots$ satisfacen la relación

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{2n+1}{2k}B_k = \frac{2n-1}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

Estos son los llamados números de Bernoulli.

5. Sea $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ y $f(z) = \frac{1}{z^{2p}(e^z-1)}$. Denotemos por Q el cuadrado $\{x+iy : |x| < (2n+1)\pi, |y| < (2n+1)\pi\}$. Muestre que

$$\oint_{\partial Q} f = 2\pi i\Big(\frac{(-1)^{p-1}B_p}{(2p)!} + \frac{2(-1)^p}{(2\pi)^{2p}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2p}}\Big),$$

y concluya que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}} = \frac{(2\pi)^{2p}B_p}{2(2p)!}.$$

En particular, ¿cuánto valen $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ y $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$?

6. Verifique que:

a) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{a+b\cos\theta}\,d\theta = 2\pi b^{-1}[1-a(a^2-b^2)^{-1/2}]$ si $0 < b < a$,

b) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{ai+b\sin\theta} = -2\pi i(a^2+b^2)^{-1/2}$ si $a > 0$, $b > 0$.

7. Calcule las integrales:

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+\pi^2)^2}$ b) $\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi x)^2\,dx}{x^2+9}$

c) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\mu x)\sin(\nu x)\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, donde $0 < \mu \leq \nu$, $0 < a \leq b$, d) $\int_0^{\infty}\frac{x^2\cos(\pi x)^2}{(x^2+1)^2}$.

8. Se puede probar que las soluciones reales de la ecuación $\tan z = z$ son de la forma $0, \pm z_1, \pm z_2, \ldots$ donde $k\pi < z_k < (2k+1)\pi/2$.

a) Demuestre que estas son las únicas soluciones de la ecuación anterior en todo el plano complejo. Ind.: considere $Q = \{x+iy : |x| < n\pi, |y| < n\pi\}$ y compare el número de polos y ceros de $\tan z - z$ y z en esta región. Para esto pruebe primero que $|\tan z| \leq 2$ en ∂Q.

b) Calcule $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k^2}$. Ind.: considere $\oint_{\partial Q}\frac{1}{z-\tan z} - \frac{1}{z}\,dz$, donde Q es el cuadrado de la indicación anterior.