

Tarea No. 4
MA36A Funciones de variable compleja

10 de octubre de 2006

Prof.: J. Dávila
Aux.: M. Duarte

1. Tarea Sea D un dominio acotado y $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, no constante y holomorfa en D . Demuestre que si $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial D$ entonces existe $z_0 \in D$ tal que $f(z_0) = 0$.

2. Tarea Este ejercicio generaliza el anterior. Sea D un dominio acotado y $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, no constante y holomorfa en D . Demuestre que si $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial D$ entonces $f(D) = \{|z| < 1\}$. Ind.: considere $g \circ f$ donde g es una transformación biholomorfa apropiada del disco $\{|z| < 1\}$ en si mismo.

3. Sea $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ un polinomio de grado $n \geq 1$ y $K = \{z : |p(z)| = 1\}$. Verifique que K es compacto, y que $U = \mathbb{C} \setminus K$ tiene a lo más $n + 1$ componentes conexas. Muestre que si D es una componente conexa acotada de U entonces $p(D) = \{|z| < 1\}$ mientras que si D_0 es la componente no acotada de U entonces $p(D_0) = \{|z| > 1\}$. Pruebe también que si U tiene exactamente $n + 1$ componentes conexas, entonces p restringida a cualquiera de las componentes acotadas es inyectiva.

4. Sea $\Delta = \{|z| < 1\}$ y $f: \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y holomorfa en Δ tal que $|f(z)| = 1 \forall z \in \partial \Delta$. Muestre que f tiene la forma

$$f(z) = c \prod_{k=1}^n \left(\frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z} \right)^{m_k},$$

donde $a_1, \dots, a_n \in \Delta$, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ y $|c| = 1$. Ind.: pruebe primero que f tiene una cantidad finita de ceros.

5. Para $|\alpha| < 1$ definamos $b_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$. Verifique que $b'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2$ y $b'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$. Dados $|\alpha|, |\beta| < 1$, encuentre el valor máximo de $|f'(\alpha)|$ cuando f es holomorfa en $\Delta = \{|z| < 1\}$, $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Delta$ y $f(\alpha) = \beta$. Ind.: considere $b_\beta \circ f \circ b_{-\alpha}$.

6. Tarea Llamemos S al sector del plano complejo dado por $S = \{z : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$. Sea \bar{S} la cerradura de S . Sea f una función continua en \bar{S} que es holomorfa en S . Suponga que además:

(a) $|f(z)| \leq 1$ para todo z en la frontera de S ,

(b) $|f(x + iy)| \leq e^{\sqrt{x}}$ para todo $x + iy \in S$.

Pruebe que $|f(z)| \leq 1$ para todo z en S . Considere $F(z) = e^{-\varepsilon z} f(z)$.

7. Sea $\Omega = \{x + iy : |y| < \pi/2\}$ y suponga que f es una función continua en $\overline{\Omega}$, holomorfa en Ω que satisface $|f(z)| \leq 1$ para $z \in \partial \Omega$. Suponga además que existen constantes $0 < \alpha < 1$, $A > 0$ tales que

$$|f(x + iy)| \leq \exp(Ae^{\alpha|x|}) \quad \forall x + iy \in \Omega. \quad (*)$$

Demuestre que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$. Muestre mediante un ejemplo que la conclusión es falsa si f satisface (*) con $\alpha = 1$. Ind.: para $\alpha < \beta < 1$ y $\varepsilon > 0$ sea $h(z) = \exp(-\varepsilon(e^{\beta z} + e^{-\beta z}))$ y aplique el principio del máximo a fh en un rectángulo conveniente.

8. Suponga que f y g son funciones no constantes y analíticas en un dominio G y continuas en la cerradura \bar{G} del dominio. Asuma que \bar{G} es compacto. Pruebe que $|f| + |g|$ alcanza su máximo en la frontera de G .