

Variable Compleja y Funciones Especiales

Pauta Control 1, Pregunta 3

Juan Dávila – Mauricio Duarte

2 de Septiembre de 2006

Problema 3

- a) (2.0 pts) Encuentre una transformación conforme biyectiva entre la región $D = B_1(0) \cap B_1(i)$ y el semi-plano $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Indicación: *utilizar una transformación de Möbius f que transforme el arco inferior de la frontera en una recta y analizar que hace f con el arco superior de la frontera. La transformación que se pide no es de Möbius.*

Solución: Primero veamos los puntos de intersección de ambas circunferencias. Por simetría los puntos A y C de intersección (con A a la izquierda de C) tienen coordenada imaginaria $\frac{1}{2}$ y por lo tanto su coordenada real es $\pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Para fijarlos bien:

$$A = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Siguiendo la indicación, sea $f(z) = [z, A, C, 0]$ la transformación de Möbius que hace $f(A) = 0, f(C) = \infty, f(0) = 1$, de manera que el arco inferior de la región D es llevado en la parte positiva de la recta real. Dado que el arco superior de D es parte de una circunferencia, se sigue que la transformación f lo envía en un arco de circunferencia o en parte de una recta. Mejor aún, dado que C es parte del arco superior y $f(C) = \infty$, sigue que $f(\partial B_1(i))$ es una recta que intersecta a la recta real en $f(A) = 0$.

Como la transformación de Möbius f es conforme, se tiene que el ángulo de intersección de las circunferencias $\partial B_1(0)$ y $\partial B_1(i)$ en A , es el mismo que las rectas discutidas anteriormente, por lo que basta calcular dicho ángulo para conocer la recta en que es mapeado el arco superior de D .

Sean $\Gamma_1 =$ “arco superior de D ” y $\Gamma_2 =$ “arco inferior de D ”. Parametrizamos estas curvas según:

$$\Gamma_1(\theta) = Ae^{2\pi i\theta} \quad \Gamma_2 = i + (A - i)e^{2\pi i\theta}$$

de manera que ambas curvas se intersectan en A , para $\theta = 0$. Sigue que:

$$\Gamma_1'(0) = 2\pi iA \quad \Gamma_2'(0) = 2\pi i(A - i).$$

Normalizando y haciendo producto punto en \mathbb{R}^2 , se tiene que si llamamos α al ángulo entre el arco inferior y el superior en el punto A , se tiene:

$$|\cos(\alpha)| = \langle i(A - i), iA \rangle = \left\langle -i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, -i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Como es claro que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ sigue que $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Entonces f transforma al arco superior de D en la semirrecta $\{te^{i\alpha} : t \geq 0\}$. Por la conservación de la orientación de las transformaciones de Möbius, se tiene que $f(D) = \{te^{i\theta} : t > 0, \theta \in (0, \alpha)\}$. Necesitamos llevar la semirrecta obtenida del arco superior de D en la recta real negativa. Esto se consigue elevando a un exponente β de manera que $\alpha \cdot \beta = \pi$. Sigue que $\beta = \frac{3}{2}$.

Finalmente $g(z) = (f(z))^\beta$ es la transformación pedida.

- b) (1.0 pts) Encontrar los valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que exista una transformación de Möbius f con

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f(\infty) = i, \quad f(\lambda) = -i.$$

Solución: Dado que f es de Möbius y fija tres puntos, es única. La transformación f debe satisfacer que $[f(\lambda), f(0), f(\infty), f(1)] = [-i, -1, i, 1]$ y como f es de Möbius, lo anterior equivale a $[\lambda, 0, \infty, 1] = [-i, -1, i, 1]$. Es decir:

$$\lambda = \frac{-i+1}{-i-i} \frac{1-i}{1+1} = \frac{(1-i)^2}{-4i} = \frac{1-2i-1}{-4i} = \frac{1}{2}.$$

- c) (3.0 pts) Sea \log la rama principal del logaritmo.

- i) Encuentre la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ de \log en torno del punto $z_0 = -4+3i$ y encuentre su radio de convergencia.

Solución: Expandimos la función $\frac{1}{z}$ en torno a z_0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_0 + z - z_0} &= \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-z_0}{z_0}\right)} \\ &= \frac{1}{z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{z_0}\right)^k (z-z_0)^k \quad \text{Para } |z-z_0| < |z_0| = 5 \end{aligned}$$

Como ambas funciones tienen primitivas conocidas, igualamos sus primitivas salvo por una constante:

$$\text{Log}(z) = C + \frac{1}{z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{-1}{z_0}\right)^k (z-z_0)^{k+1}$$

Evalutando en z_0 obtenemos $C = \text{Log}(z_0)$. Finalmente:

$$\text{Log}(z) = \text{Log}(z_0) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{-1}{z_0}\right)^{k+1} (z-z_0)^{k+1}$$

La anterior igualdad sólo vale en el disco de convergencia de la serie y en el conjunto $\{z : \text{Im}(z) > 0\}$ puesto que Log no es continua en la recta real negativa.

Como

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k+1} \left(\frac{-1}{z_0} \right)^{k+1} \right|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{(k+1)5^k}} = \frac{1}{5} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{(k+1)}} = \frac{1}{5},$$

se tiene que el radio de convergencia es $R = 5$.

- ii) Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ la serie de potencias encontrada en la parte anterior. Evalúe: $f(-2 + 2i)$.

Solución: Como $|z_0 - (-2 + 2i)| = |-4 + 3i + 2 - 2i| = |-2 - i| = \sqrt{5} < 5$ e $\operatorname{Im}(-2 + 2i) = 2 > 0$ se tiene que la serie evaluada en $-2 + 2i$ es igual a $\operatorname{Log}(-2 + 2i)$.

$$-2 + 2i = \sqrt{8} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{8} \exp \left(i \frac{3}{4}\pi \right)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(-2 + 2i - z_0)^k = \frac{1}{2} \log(8) + \frac{3\pi}{4}i.$$