

Tarea No. 2

MA36A Funciones de variable compleja

23 de agosto de 2006

Prof.: J. Dávila
Aux.: M. Duarte

1. Supongamos que f es analítica en el abierto $U \subset \mathbb{C}$. Definamos $U^* = \{\bar{z} : z \in U\}$ y $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ para $z \in U^*$. Pruebe que g es analítica en U^* y que $g'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$.
2. Encuentre una función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de modo que $f = u + iv$ con $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, y tal que f sea diferenciable sólo en el círculo $\{z : |z| = 1\}$ y en origen con $f'(0) = 1$ (y en ningún otro punto de \mathbb{C}).
3. Estudie la geometría de la transformación $w = f(z) = \sin(z)$. Más precisamente pruebe que f transforma rectas horizontales en elipses y rectas verticales en hipérbolas.
4. Determine si las funciones $\sin(\sqrt{z})$, $\cos(\sqrt{z})$ son enteras. (Una función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice entera si es analítica en todo el plano complejo.)
5. Generalizando el ejercicio anterior, pruebe que si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es entera y par, es decir $f(z) = f(-z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f(\sqrt{z})$ es entera.
6. Decimos que una función continua $L: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con D abierto es una rama del logaritmo si $e^{L(z)} = z$ para todo $z \in D$. Considere $D = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ donde $S_k = \{z : |z - 1| = k, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ si $k = 1, 3, 5, \dots$ y $S_k = \{z : |z| = k, \operatorname{Im} z \leq 0\}$ si $k = 2, 4, 6, \dots$. Se puede probar que existe una única rama del logaritmo L en D con $L(1) = 0$. Aquí se le pide calcular $L(-1)$, $L(e)$, $L(e^2)$ y $L(2k + 1)$ para $k \in \mathbb{N}$.
7. Encuentre los discos de convergencia para las series

a) $\sum_{n \geq 1} 3^n n^3 (n!)^3 \frac{z^{3n}}{(3n)!}$,

d) $\sum_{n \geq 1} n! (z - i)^{n!}$,

b) $\sum_{n \geq 1} n^{1/n} (z - 1)^n$,

e) $\sum_{n \geq 2} (\log n)^n (z + 1)^{n^2}$.

c) $\sum_{n \geq 1} n^2 (z + 2)^{2^n}$,
8. Demuestre el siguiente resultado (criterio de Leibniz): si $(z_n) \subset \mathbb{C}$ es una sucesión cuyas sumas parciales permanecen acotadas, es decir, existe C tal que $|\sum_{n=0}^N z_n| \leq C$ para todo $N \geq 0$, y $(r_n) \subset [0, \infty)$ es una sucesión decreciente con $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} r_n z_n$ converge.
9. Encuentre el radio de convergencia de $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$. Demuestre, usando el ejercicio anterior que esta serie converge para todo z con $|z| = 1$ excepto para $z = 1$, donde diverge. Encuentre una expresión para $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ en términos de Log válida para $|z| \leq 1$, $z \neq 1$ y calcule $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$.
10. Obtenga expansiones en serie de potencias alrededor del cero para las siguientes funciones, e indique el mayor disco donde estas expansiones son válidas:

a) $f(z) = \frac{1}{(1 - z)^2}$,

d) $f(z) = \operatorname{Log}(1 + z^2)$,

b) $f(z) = \frac{1}{(1 + z^2)^3}$,

e) $f(z) = \operatorname{Log}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$,

c) $f(z) = \arctan(z)$,

f) $f(z) = \frac{1}{(z^2 + z - 2)^2}$.
11. Sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R positivo. Verifique que f es par ssi $a_n = 0$ para todo n impar, f es impar ssi $a_n = 0$ para todo n par, y $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ $\forall |z| < R$ (esto es, es simétrica con respecto al eje real), ssi $a_n \in \mathbb{R}$ para todo n .
12. Compruebe que la serie $f(z) = \sum_{n \geq 1} z^{n!}$ tiene radio de convergencia 1 y que para todo θ con θ/π racional $\lim_{r \rightarrow 1^-} |f(re^{i\theta})| = \infty$ cuando $r \rightarrow 1^-$.
13. Sea $h(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n!}}{n!}$. Demuestre que h es holomorfa en $B(0, 1)$ y tiene una extensión continua a $\overline{B(0, 1)}$, pero que no es posible extenderla de manera holomorfa a ningún conjunto que contenga de manera estricta a $B(0, 1)$. Es decir, si $B(0, 1) \subset D$, $B(0, 1) \neq D$ con D abierto, no existe H holomorfa en D que sea una extensión de h . Ind: puede usar el siguiente hecho aunque no lo

hayamos demostrado aún en clases: si f es holomorfa en un abierto D entonces f' también es holomorfa en D .

14. Suponga que $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$. Para $0 < r < R$ verifique que $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$. Ind.: $|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)}$ y recuerde que la convergencia de la serie es uniforme sobre $\{|z| = r\}$.

15. Suponga que $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $R \geq 1$ y que f se puede extender a una función continua en $\overline{B(0,1)}$. Demuestre que $2\pi \sum_{n \geq 0} |a_n|^2$ es una serie convergente y que es igual a $\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$.

16. Sean $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $b(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$, $c(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ series de potencias con radios de convergencia al menos $R > 0$ y considere la ecuación diferencial

$$f'' = a(z)f' + b(z)f + c(z). \quad (*)$$

- a) Suponga que $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ tiene radio de convergencia positivo y satisface (*). Encuentre una relación de recurrencia para los coeficientes f_n .
- b) Demuestre que si los coeficientes $(f_n) \subset \mathbb{C}$ satisfacen la relación de recurrencia de la parte a), entonces $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ tiene radio de convergencia al menos R y es una solución de (*).