

# Tarea No. 1

## MA36A Funciones de variable compleja

2 de Agosto, 2006  
Aux.: M. Duarte

Prof.: J. Dávila

1. Sean  $a, b \in \mathbb{C}$  tales que  $|a| = |b| > 1$  y la sucesión  $a^n - b^n$  es acotada. Pruebe que  $a = b$ .
2. Considere  $t \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ . Construya una sucesión  $(z_n) \subset \mathbb{C}$  tal que  $z_n \rightarrow \infty$  y  $\operatorname{Re}(z_n^2 + z_n) \rightarrow t$ . ¿Es posible encontrar una sucesión  $(z_n) \subset \mathbb{C}$  de modo que  $z_n \rightarrow \infty$  y  $z_n^2 + z_n \rightarrow t$ ?
3. Bosqueje los conjuntos siguientes y determine si son abiertos o cerrados:
  - a)  $\{z^2 : \operatorname{Re} z > a\}$ , donde  $a \geq 0$
  - b)  $\{z : \operatorname{Im} z > 0 \text{ o } z^3 = 1\}$
  - c)  $\{z : |z - z_0| \leq 1 \text{ y } |z - z_1| < 1/2\}$ , donde  $|z_0 - z_1| < 1/2$
  - d)  $\{z : \operatorname{Im}(z^2) > 0 \text{ o } \operatorname{Re}(z^3) < 0\}$
4. Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua en 0 tal que  $f(z + w) = f(z)f(w)$  para todo  $z, w \in \mathbb{C}$ . Pruebe que  $f$  es continua en  $\mathbb{C}$ .
5. Definamos  $\operatorname{Log}(z) = \log(|z|) + i\theta$  donde  $z = |z|e^{i\theta}$  con  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . Probar que  $\operatorname{Log}(1 - z^2) = \operatorname{Log}(1 - z) + \operatorname{Log}(1 + z)$  para  $|z| < 1$ . ¿Qué se puede decir de  $\operatorname{Log}((1 - z)/(1 + z))$  para  $|z| < 1$ ?
6. Considere un cuadrado en  $\mathbb{C}$  y denotemos por  $z_1, z_2, z_3, z_4$  sus vértices en orden consecutivo (en sentido antihorario). Pruebe que

$$\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} = 2. \quad (1)$$

Pruebe que si  $z_1, z_2, z_3, z_4$  son los vértices de un paralelogramo (en orden consecutivo con sentido antihorario) y (1) vale entonces el paralelogramo es un cuadrado. ¿Se puede afirmar lo mismo si se sabe solamente que  $z_1, z_2, z_3, z_4$  son los vértices de un cuadrilátero?

7. Sea  $A = \{z : |z| > 1\}$  y  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  definida mediante  $f(z) = \frac{z+z^{-1}}{2}$ . Demostrar que  $f$  es inyectiva y que su imagen es  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Encuentre la inversa de  $f$  sobre  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . ¿Es  $f^{-1}$  continua?
8. Demuestre que  $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$  es una biyección entre  $\{z : |z| < 1\}$  y el semi-plano  $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ .
9. Sea  $\Sigma$  la esfera de Riemann y  $S = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma : \zeta \geq \zeta_0\}$ , donde  $0 < \zeta_0 < 1$  y sea  $T$  el correspondiente conjunto en  $\mathbb{C}$ . Muestre que  $T$  es el exterior de un círculo centrado en 0.
10. Suponga que  $z$  es la proyección estereográfica de  $(\xi, \eta, \zeta)$  y  $\frac{1}{z}$  es la proyección de  $(\xi', \eta', \zeta')$ .
  - a. Muestre que  $(\xi', \eta', \zeta') = (\xi, -\eta, 1 - \zeta)$ .
  - b. Muestre que la función  $\frac{1}{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , se representa en  $\Sigma$  por una rotación de  $180^\circ$  en torno al diámetro de extremos  $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$  y  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ .

11. Para  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  denotemos por  $f_A$  la transformación  $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Pruebe que si  $\det A = \det B = 1$  y  $f_A = f_B$  entonces  $A = B$  o  $A = -B$ .
12. Sean  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  puntos distintos en  $\widehat{\mathbb{C}}$  que pertenecen a un mismo círculo. Pruebe que  $z_1$  y  $z_3$  separan a  $z_2$  y  $z_4$  si y sólo si

$$|[z_1, z_3, z_2, z_4]| + |[z_3, z_1, z_2, z_4]| = 1.$$

13. Construya una transformación de Möbius  $f$  tal que
  - a)  $f$  transforma  $i$  en 1, 1 en  $\infty$  e  $\infty$  en  $i$ ;
  - b)  $f$  transforma  $\{|z - i| = 1\}$  en  $\{w : (1 + i)w + (1 - i)\bar{w} = 0\}$ ;
  - c)  $f$  transforma  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  en  $\{|z| = 1\}$  y deja fijo al punto  $-1$ ;
  - d)  $f$  transforma  $\{|z| < 1\}$  en  $\{\operatorname{Im} w > 0\}$  y  $f(0) = 1 + 2i$ ;

- e)  $f$  transforma  $\{|z| = 1\}$  en si mismo y  $\{|z - 1/4| = 1/4\}$  en  $\{|z| = r\}$  para algún  $r < 1$ .
14.  $f$  se dice antiMöbius si  $f = b \circ \rho$  donde  $b$  es de Möbius y  $\rho(z) = \bar{z}$ . Si  $f$  es antiMöbius muestre que el conjunto de puntos fijos de  $f$  contiene a lo más dos puntos o es un círculo  $K$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , y pruebe que el último caso ocurre si y sólo si  $f$  es la reflexión a través de  $K$ .
15. Sea  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $ad - bc = 1$  y  $H = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ . Muestre que  $f(H) = H$  si y sólo si  $a, b, c$  y  $d$  son reales.
16. Sea  $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  una biyección continua que transforma círculos en círculos. Muestre que  $f$  es de Möbius o antiMöbius.
17. Muestre que las  $n$  raíces de 1 (aparte de 1) satisfacen la ecuación “cíclica”  $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$ . *Puede servirle la identidad  $z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + 1)$ .*
18. Considere las  $n - 1$  diagonales de un  $n$ -ágono regular inscrito en un círculo unitario obtenidas conectando un vértice con todos lo demás. Muestre que el producto de los largos de dichas diagonales es  $n$ .