2/10/06 PAUTA CONTROL 2 MA34B

3horas R. Assar, N. Lacourly, A. Peña

Problema 1

(a) $f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1$, donde $\theta 0$. La función de verosimilitud es entonces:

$$f(x_1, ..., x_n|\theta) = \theta^n \prod_i x_i^{\theta-1}, \quad 0 < x_i < 1$$

y la región crítica se obtiene del Lema de Neyman- Pearson: Se rechaza H_0 si

$$f(x_1, ..., x_n|\theta_1)/f(x_1, ..., x_n|\theta_o) \geq k_\alpha.$$

Lo que lleva a la región crítica $\sum_{i=1}^n \log X_i \geq k_\alpha$.

(b) La función de densidad de $Y = -2\theta_o log X_i = -4 log X_i$ es: $g(y|\theta) = f(x|\theta)dx/dy = \frac{1}{2}e^{-y/2} \sim \chi_2^2$, luego $-4\sum_{i=1}^n \log X_i \sim \chi_{2n}^2$.

(c) $Re^* = \{\mathbf{x} \in [0,1]^n : -2\theta_o \sum_{i=1}^n \log X_i \leq c\}$ donde c es tal que $I\!P(\chi_{20}^2 \leq c)$=0.05 o sea c=10.851 y k_α=-2.713. Como $\sum log x_i = -5{,}846$ se concluye que no se puede rechazar H_0 con un error de 5 %.

El error de tipo II es $1 - I\!P(\chi_{20}^2 \leq$2.713$*2*\theta_1) = 1 - I\!P(\chi_{20}^2 \leq$ 15.193)=76.5 %. Lo que no permite concluir nada.

El p-valor es igual a $I\!P(\chi_{20}^2 \leq -2\theta_o$ -5.846)=$I\!P(\chi_{20}^2 \leq$ 23.384)=73 %. Lo que se interpreta como la probabilidad de equivocar si rechazamos H_0 con los valores de la muestra actual. Se confirma que seria muy arriesgado rechazar H_0.

Problema 2

(a) Observamos que $\bar{x} - \bar{y} \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2(1/n + 1/m)$ y $\frac{ns_1^2 + ms_2^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n+m-2}^2$ y los dos estadísticos son independientes. Se propone entonces un test basando sobre el estadístico de Student:

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sqrt{\frac{ns_1^2 + ms_2^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2}$$

La región crítica que maximiza la potencia es entonces de la forma: $\{T \leq u\}$

(b) Obtenemos $T \leq -1{,}65$ o sea la región crítica $\bar{x} - \bar{y} \leq -0{,}271$. Encontramos en la muestra un valor igual a -0.5, lo que lleva a decidir que $\mu_1 \leq \mu_2$.

(c) Cuando n y m decrecen, es más difícil rechazar H_0.

Problema 3

(a) $\bar{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$. El pivote para el intervalo de confianza para μ es una Student a n-1 grados de libertad. El intervalo es:

$$[\bar{x} - t_{n-1}^{0{,}975} s/\sqrt{n}, \bar{x} + t_{n-1}^{0{,}975} s/\sqrt{n}] = [0{,}5864, 0{,}8036]$$

El intervalo es simétrico con respecto a $\bar{x}$.

(b) El intervalo es de la forma: $[\bar{x}-u, \bar{x}+u]$ con 2u=0.12. Luego u=0.06 y $\bar{x}-u$=0.695-0.06= 0.6350. Si $b = t_{19}^{0,975}$, $b = (\bar{x} - 0{,}635)\sqrt{20}/0{,}232$=1.1566. Finalmente $I\!P(t_{19} \geq 1{,}1566)$ =0.13 y el nivel de confianza es el doble o sea 0.26.

(c) $20s^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{19}$. Con el nivel de confianza 90 %y s^2=0.0538, tenemos $I\!P(\chi^2_{19} \leq 30{,}14)$=0.95 y $I\!P(\chi^2_{19} \leq 10{,}12)$=0.05. Obtenemos entonces el intervalo: [0.0357, 0.1064].

(d) $I\!P(\mu < a) + I\!P(\mu > b)$=0.05. Luego $I\!P(\mu < a)$=0.01 y $I\!P(\mu > b)$=0.04.

$I\!P(t_{19}^0{,}01 < \frac{\bar{x}-a}{s^2/\sqrt{n}})$=0.01 $\Rightarrow a = \bar{x}$-2.539*0.232/$\sqrt{20}$=0.5633.

$I\!P(t_{19}^0{,}96 < \frac{\bar{x}-b}{s^2/\sqrt{n}})$=0.96 $\Rightarrow b = \bar{x}$+1.8495*0.232/$\sqrt{20}$=0.7909.

(e) $I\!P(x_1 = 0, ..., x_n = 0|\lambda) = e^{-n\lambda} \geq \alpha_o$.

Si $e^{-n\lambda} \geq \alpha_o$ entonces $-n\lambda \geq ln(\alpha_o) \Rightarrow \alpha_o \leq ln(\alpha_o)$

S α_o=0.05 entonces $\lambda \in [0, -\frac{1}{n}ln(0{,}05)]$ entonces $I\!P(x_1 = 0, ..., x_n = 0|\lambda) \geq 0{,}05$. Resulta ser una manera de encontrar un intervalo para λ.