

Problemas Resueltos

Problema 1

Se sabe que en una muestra aleatoria de 10 vigas de acero, la resistencia promedio a la composición es :

$$\bar{X}_n = 57.498 \frac{\text{libras}}{\text{pulg}^2}, S_n = 539 \frac{\text{libras}}{\text{pulg}^2}, \quad \text{con} \quad \alpha = 0.01$$

a) Realice el test, suponiendo que $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$

$$H_0 : \mu = 57.000$$

$$H_1 : \mu < 57.000$$

b) $H_0 : \mu = 57.000$

$$H_1 : \mu \neq 57.000$$

Solución:

a) La región de rechazo , donde se rechaza H_0 es $W = \{\bar{X}_n < C\}$, Por lo tanto, debemos encontrar el valor de C para definir los \bar{X}_n que pertenecen a tal región, para lo cual ocupamos lo siguiente.

$$\alpha = 0.01 = P(\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ cierto}) = P(\bar{X}_n < C / \mu = 57.000)$$

$$\text{como sabemos que } \frac{(\bar{X} - \mu) \cdot \sqrt{n-1}}{S_n} \rightarrow t_{n-1}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{(\bar{X}_n - \mu) \sqrt{n-1}}{S_n} < \frac{(C - \mu) \sqrt{n-1}}{S_n} / \mu = 57.000 \right) = P(t_9 < \frac{(c - 57.000) \sqrt{9}}{539}) = 0.01$$

$$\Rightarrow P(t_9 < t) = 0.01$$

$$\Rightarrow t = -2.821$$

$$\Rightarrow \frac{(C - 57.000) * 3}{539} = -2.821 \Rightarrow C = 56.493,2$$

Entonces, la región de rechazo queda definida por $W = \{\bar{X}_n < 56.493,2\}$,

como en nuestro caso $\bar{X}_n = 57.498$, $\bar{X}_n \notin W$

\Rightarrow no se rechaza H_0 .

b) si tenemos las siguientes hipótesis $H_0 : \mu = 57.000$
 $H_1 : \mu \neq 57.000$

En este caso la hipótesis alternativa representa a dos casos $\mu < 57.000$ o $\mu > 57.000$.
Por lo tanto, la solución debe considerar ambos casos, para lo cual resolvemos

Test 1

\cup

Test 2

$$H_0 : \mu = 57.000$$

$$H_1 : \mu < 57.000$$

$$W_1 = \{\bar{X}_n < C_1\}$$

$$H_0 : \mu = 57.000$$

$$H_1 : \mu > 57.000$$

$$W_2 = \{\bar{X}_n > C_2\}$$

$$\Rightarrow W = W_1 + W_2 = \{\bar{X}_n < C_1 \cup \bar{X}_n > C_2\}$$

$$\Rightarrow P(\bar{X}_n < C_1) + P(\bar{X}_n > C_2) = 0.01$$

\Rightarrow basta con encontrar C_1 y C_2 con el mismo procedimiento anterior.

Problema 2

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\sigma^2 = 25$ y una muestra de tamaño $n=36$. Se construye un test para la hipótesis nula $H_0 : \mu \leq 24$ contra la hipótesis alternativa $H_1 : \mu > 24$.

a) Dé la región crítica del test UMP para un error de tipo I (nivel de significación) $\alpha = 0.05$.

b) Calcule la potencia del test para $\mu = 25$.

c) Si $n=49$, determine el valor de α que permita obtener la misma región crítica que en a).

d) Si $n=49$ y $\alpha = 0.05$, determine el valor de μ que produce la misma potencia que en b).

Solución:

a) La razón de verosimilitudes es monótona en la media muestral \bar{x} (o en $\sum_i x_i$):

$$\text{La función de verosimilitud es: } f_n = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (x_i - \mu)^2\right)$$

Luego la razón de verosimilitudes

$$\frac{f_n(x | \mu_1)}{f_n(x | \mu_o)} = \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} (2(\mu_o - \mu_1) \sum_i x_i + n(\mu_1^2 - \mu_o^2)) \right\} \text{ es monótona creciente. Se}$$

puede aplicar el lema de Neyman Pearson para $H_o : \mu = 24$ contra la hipótesis alternativa unilateral $H_1 : \mu > 24$).

$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ con $\sigma^2 = 25$ y $n=36$. La región crítica es de la forma : $\bar{x} \geq c$ con

$$P(\bar{x} \geq c | \mu = 24) = 0.05 \Rightarrow P(z \geq \frac{\sqrt{n}(c - \mu)}{\sigma} | \mu = 24) = 0.05 \text{ en donde}$$

$$z \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}(c - \mu)}{\sigma} = 1.65 \Rightarrow \bar{x} \geq 25.375$$

b) La potencia del test para $\mu = 25$ es:

$$P(\bar{x} \geq c | \mu = 25) = P(z \geq \frac{\sqrt{n}(c - 25)}{\sigma}) = P(z \geq 0.45) = 0.326$$

$$\text{c) Si } n=49; P(z \geq \frac{\sqrt{n}(25.375 - \mu)}{\sigma} | \mu = 24) = 0.0271$$

d) Si $n=49$ y $\alpha = 0.05$,

ahora hay que recalcular la región crítica, pues el n ha cambiado y es función de n . Se obtiene $c = 25.179$

$$P(\bar{x} \geq c | \mu) = P(z \geq \frac{\sqrt{49}(25.179 - \mu)}{5}) = P(z \geq 0.45) = 0.326$$

$$\Rightarrow \mu = 25.179 - \frac{0.45 * 5}{7} = 24.86$$

Problema 3

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\sigma^2 = 9$ y una muestra de tamaño $n=36$. Se construye un test para la hipótesis nula $H_0 : \mu = 20$ contra la hipótesis alternativa $H_1 : \mu = 18$.

- Dé la región crítica del test más potente para un error $\alpha = 0.01$ de tipo I.
- Calcule el error β de tipo II del test.
- Si $n=49$, determine el valor de α que permita obtener la misma región crítica que en a). Deduzca β .
- Si $n=49$ y $\alpha = 0.01$, determine el valor de μ de la hipótesis alternativa que produce el mismo error β de tipo II que en b)

Solución:

- a) La región crítica más potente del test esta dada por el lema de N.P.:

$$P(\bar{x} \leq c \mid \mu = 20) = 0.01. \text{ Como } \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow P(N(0,1) \leq 2(c - 20)) = 0.01 \Rightarrow$$

$$2(c - 20) = -2.33 \Rightarrow c = 18.84. \text{ La región crítica es entonces: } \boxed{\bar{x} \leq 18.84}.$$

- b) El error de tipo II es $\beta = P(\bar{x} > 18.84 \mid \mu = 18) = P(N(0,1) > 2(18.84 - 18)) = 0.0465 \Rightarrow$

$$\boxed{\beta = 0.0465}$$

- c)

$$\alpha = P(\bar{x} \leq 18.84 \mid \mu = 20) = P(\sqrt{n}(\bar{x} - 20)/3 \leq \sqrt{n}(18.84 - 20)/3) = P(N(0,1) \leq -2.7) = 0.0035$$

$$\beta = P(\bar{x} > 18.84 \mid \mu = 18) = P(N(0,1) > 7(18.84 - 18)/3) = P(N(0,1) > 1.96) = 0.025$$

$$\boxed{\alpha = 0.0035 \text{ y } \beta = 0.025}$$

- d) Para $n=49$ y $\alpha = 0.01$ se obtiene una región crítica:

$$\alpha = P(\bar{x} \leq c \mid \mu = 20) = P(7(\bar{x} - 20)/3 \leq 7(c - 20)/3) = 0.01. \text{ Es decir } 7(c - 20)/3 = -2.326.$$

Finalmente $c = 19.003$. En el punto b) $\beta = 0.0465$. Si $n = 49$ y $\alpha = 0.01$, el error de tipo

II se escribe:

$$\beta = P(\bar{x} > 19.00 \mid \mu) = P(N(0,1) > 7(19.00 - \mu)/3) = 0.0465. \text{ Es decir que hay que cambiar}$$

la hipótesis alternativa por: $\boxed{\mu = 18.28}$.

Problema 4

Sea $X \sim N(\theta, 1)$, una muestra aleatoria simple de tamaño $n=100$ y una media muestral $\bar{x} = 1.2$. Se efectúan los tests siguientes con un error $\alpha = 0.05$ de tipo I.

- Dé la región crítica más potente para la hipótesis nula $H_0 : \theta = 1$ contra $H_1 : \theta = 1.4$. Concluir.
- Dé la región crítica más potente para la hipótesis nula $H'_0 : \theta = 1.4$ contra $H'_1 : \theta = 1$. Concluir. Calcule los errores de tipo II para los dos tests en a) y b).
- Observe que los resultados de los dos tests son contradictorios. Justifique. Encuentre el tamaño n de muestra mínimo que permite suprimir esta contradicción.
- Si tomamos $n=100$ ¿tendremos una contradicción para el nivel de significación $\alpha = 0.023$?

Solución:

a) $X \sim N(\theta, 1) \Rightarrow \bar{x} \sim N(\theta, \frac{1}{n})$. En el caso de estas hipótesis simples, el lema de Neyman

Pearson nos lleva a una región crítica de la forma $\bar{x} \geq c$ en donde c está determinado por el error de tipo I:

$$P(\bar{x} \geq c | \theta = 1) = 0.05 \Rightarrow P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1) \geq \sqrt{n}(c - 1)) = 0.05 \text{ con } \sqrt{n}(\bar{x} - 1) \sim N(0, 1).$$

$$\text{Las tablas nos dan que } \sqrt{n}(c - 1) = 1.65 \Rightarrow c = 1 + \frac{1.65}{\sqrt{n}} = 1.165 \Rightarrow \boxed{\text{se rechaza}}$$

$$\boxed{H_0 : \theta = 1} \text{ dado que } \bar{x} = 1.2.$$

b) En el caso de estas nuevas hipótesis simples, el lema de Neyman Pearson nos lleva a una región crítica de la forma $\bar{x} \geq c'$ en donde c' está determinado por el error de tipo I:

$$P(\bar{x} \leq c' | \theta = 1.4) = 0.05 \Rightarrow P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1.4) \leq \sqrt{n}(c' - 1.4)) = 0.05 \text{ con}$$

$$\sqrt{n}(\bar{x} - 1.4) \sim N(0, 1). \text{ Las tablas nos dan que } \sqrt{n}(c' - 1.4) = -1.65 \Rightarrow$$

$$c' = 1.4 - \frac{1.65}{\sqrt{n}} = 1.235 \Rightarrow \boxed{\text{se rechaza } H'_0 : \theta = 1.4}$$

Observamos que en a) y en b) los resultados son opuestos: se rechaza $\theta = 1$ en a) y se rechaza $\theta = 1.4$ en b).

El error de tipo II en a) es igual a:

$$P(\bar{x} < 1.165 | \theta = 1.4) = P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1.4) < \sqrt{n}(1.165 - 1.4)) = P(N(0, 1) < -2.35) = 0.0094$$

.

El error de tipo II en b) es igual a:

$$P(\bar{x} > 1.235 | \theta = 1) = P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1) > \sqrt{n}(1.235 - 1)) = P(N(0,1) > 2.35) = 0.0094$$

c) Las conclusiones encontradas en a) y b) son opuestas. Para eliminar la contradicción basta tomar n de manera que la región crítica del test de a) sea $\bar{x} \geq 1.2$ y la región crítica del test de b) sea $\bar{x} \leq 1.2$. Entonces se tiene: $P(\bar{x} \geq 1.2 | \theta = 1) = 0.05 \Rightarrow$

$$P(\sqrt{n}(\bar{x} - 1) \geq \sqrt{n}(1.2 - 1)) = P(N(0,1) \geq 0.2\sqrt{n}) = 0.05 \Rightarrow 0.2\sqrt{n} = 1.65 \Rightarrow n=68.$$

3.4 Para el test de a):

$$P(\bar{x} \geq c | \theta = 1) = P(N(0,1) \geq 10(c - 1)) = 0.023 \Rightarrow 10(c - 1) = 2 \Rightarrow c = 1.2$$

Para el test de b):

$$P(\bar{x} \leq c' | \theta = 1.4) = P(N(0,1) \leq 10(c' - 1.4)) = 0.023 \Rightarrow 10(c' - 1.4) = -2 \Rightarrow c = 1.2$$

\Rightarrow No hay contradicción.

Problema 5

Sea una distribución que depende de un parámetro θ y Ω el espacio de parámetros.

Sea la hipótesis nula de $H_0 : \theta \in \Omega_0$ contra la hipótesis alternativa $H_1 : \theta \in \Omega_1$.

- ¿Qué condición deben cumplir Ω_0 y Ω_1 ?
- ¿Qué es la región crítica de un test de hipótesis?
- ¿Qué es una función de potencia? (Define bien el dominio y el recorrido y dé su interpretación).
- ¿Qué es un test uniformemente más potente?
- Un juez tiene que decidir basándose en evidencias si un acusado es culpable. Plantee las hipótesis nula y alternativa para que si el juez condene al acusado sea con bastante seguridad.

Solución:

Sea la hipótesis nula de $H_0 : \theta \in \Omega_0$ contra $H_1 : \theta \in \Omega_1$

- La condición es: $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$.
- La región crítica de un test es la regla de decisión que determina las muestras que llevan a elegir la hipótesis alternativa. (OJO! hay distintas manera de decir lo mismo).
- La función de potencia es una función $\pi : \Omega \rightarrow [0,1]$, con Ω el espacio del parámetro, suponemos llamado θ . La función de potencia es una función θ y es $\pi(\theta) = P(\text{rechazar } H_0 \text{ con la regla de decisión con el valor } \theta \text{ del parámetro})$.

d) Es un test que proporciona una regla de decisión óptima (Máxima potencia) sobre todos los valores de la hipótesis alternativa. Generalmente con una hipótesis alternativa bilateral no existe un test UMP.

e) H_0 : el acusado es inocente, H_1 : el acusado es culpable.

Problema 6

Sea $X \rightarrow p_\theta(x) = (\theta+1)x^\theta \quad x > 0$.

Se tiene una muestra de tamaño 1 ($n=1$)

Se observa que $X=0,63$.

Se propone $H_0 : \theta = 1$
 $H_1 : \theta = 2$

- Encontrar la región de rechazo que minimiza el error tipo II y decida si rechaza H_0 o no. Calcule el error tipo II.
- Dibuje la función de potencia si se propone $R=\{x>0,5\}$

Solución:

a) Ya sea si se está minimizando la combinación lineal de los errores de decisión con α y β dados o fijando α , el procedimiento es el mismo, Neyman-Pearson. De la parte anterior:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{(1+2)x^2}{(1+1)x^1} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3x}{2} > k, \text{ donde } k \text{ es desconocido ahora.}$$

La forma de la región de rechazo es $W = \{ X > C \}$. Para encontrar el valor de C , se usa el error de tipo I:

$$P(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$P(X > C / \theta = 1) = \alpha = 0,2$$

$$P(X > C / \theta = 1) = 1 - P(X \leq C / \theta = 1) = 1 - F(C / \theta = 1)$$

$$= 1 - C^2 = 0,2 \Rightarrow C = 0,8944$$

Luego, $W = \{ X > 0,8944 \}$ y como $x=0,63 \Rightarrow$ No se rechaza H_0 . El error de tipo II para la decisión anterior es:

$$P(\text{Aceptar } H_0 / H_0 \text{ falsa}) = \beta$$

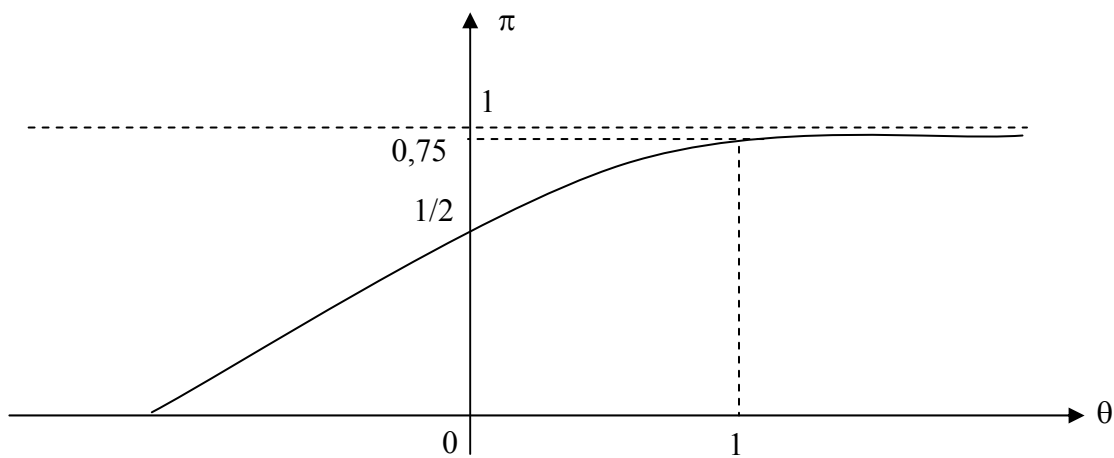
$$P(X \leq 0,8944 / \theta = 2) = \beta$$

$$P(X \leq 0,8944 / \theta = 2) = F(0,8944 / \theta = 2) = (0,8944)^3 = \beta$$

$$\Rightarrow \beta = 0,7155$$

b) Se tiene un procedimiento para rechazar la hipótesis planteada donde la región de rechazo es $W = \{ X > 0,5 \}$

La función de potencia es entonces: $\pi(\theta) = P(\text{Rechazar } H_0/\theta) = P(X > 0,5/\theta) = 1 - P(X \leq 0,5/\theta) = 1 - F(0,5/\theta) = 1 - (0,5)^{\theta+1}$. Dibujando:



(Luego el tamaño del test es $\alpha = \text{Sup } \pi(\theta) = \pi(1) = 0,75$ ($\theta \in \Omega_0$))