

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesor Auxiliar : José Luis Malverde
: Evelyn Andaur

PAUTA EXAMEN 24 NOVIEMBRE 2006

1. a) Notemos en primer lugar, que el experimento puede ser modelado como una v.a. binomial, donde los parámetros serán la cantidad de días y la probabilidad de figurar presente (que no es lo mismo que estar presente). La probabilidad de quedar presente (gracias a probabilidades totales) quedará dada por $\tilde{p} = p + (1-p)(1-q)$. Denotemos por U la utilidad del apostador, que estará dada por:

$$U = \begin{cases} C & \text{si gana} \\ -M & \text{si pierde} \end{cases}$$

Luego la condición necesaria para que le convenga la apuesta es:

$$\mathbb{E}(U) = c \cdot \mathbb{P}(\text{ganar}) - M\mathbb{P}(\text{perder}) \geq 0$$

donde

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) = \sum_{i=\lceil 0,8 \cdot N \rceil}^N \mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=\lceil 0,8 \cdot N \rceil}^N \binom{N}{i} \tilde{p}^i (1-\tilde{p})^{N-i}$$

En resumen la condición necesaria es:

$$C \frac{\mathbb{P}(\text{ganar})}{1 - \mathbb{P}(\text{ganar})} \geq M$$

Nota: En el cálculo de $\mathbb{P}(\text{ganar})$ es necesario considerar la suma desde $\lceil 0,8 \cdot N \rceil$ (cajón superior de $0,8 \cdot N$) sólo para que el problema quede bien definido, pero este detalle no afectará mayormente la corrección.

- b) Sean los eventos:

- A: Don Francisco dice que se cumplirá la meta.
- B: Se cumple la meta.

Se desea calcular $\mathbb{P}(B|A)$, por bayes se tiene:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Notese que tanto $\mathbb{P}(A|B)$ como $\mathbb{P}(A)$ están dados por enunciado y corresponden a $\frac{2}{3}$ y $\frac{9}{10}$ respectivamente. Mientras que $\mathbb{P}(A)$ se puede calcular por probabilidades totales, quedando $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^C)\mathbb{P}(B^C)$.

2. a) TCV

$$Z = (-2\ln(x))^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi Y)$$

$$W = (-2\ln(x))^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi Y)$$

$$Z^2 + W^2 = -2\ln(x) \Rightarrow X = e^{\frac{-(Z^2+W^2)}{2}}$$

$$\frac{Z}{W} = \tan(2\pi Y) \Rightarrow Y = \frac{1}{2\pi} \cdot \arctg\left(\frac{Z}{W}\right)$$

Dado el TCV $f_{W,Z}(w, z) = f_{X,Y}(x(w, z), y(w, z)) \cdot |\det(J)|$ y teniendo que $f_{X,Y} = 1$ (pues X e Y son variables aleatorias uniformes) se tendrá que:

$$f_{W,Z}(w, z) = 1 \cdot |\det(J)|$$

$$\therefore f_{W,Z}(w, z) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(Z^2+W^2)}{2}}$$

Viendo las marginales:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} dw \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \rightarrow N(0, 1)$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \Rightarrow f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} \rightarrow N(0, 1)$$

Y con esto, claramente $f_{W,Z}(w, z) = f_Z(z) \cdot f_W(w) \Rightarrow Z, W$ son independientes.

b) Distribución Pareto

Tenemos que $f(x) = \alpha c^\alpha x^{-\alpha-1} \quad x > c$

Reemplazando los datos entregados, $f(x) = 3 \cdot 400^3 X^{-4}$

Necesitamos que $\mathbb{P}(|\bar{x} - IE(x)| < 10) = 0,99 \text{ o } 0,95$

$$\mathbb{E}(x) = \int_{400}^{\infty} x \cdot 3 \cdot 400^3 X^{-4} = 600$$

$$\mathbb{E}(x^2) = \int_{400}^{\infty} x^2 \cdot 3 \cdot 400^3 X^{-4} = 4,800$$

$$\therefore \text{Var}(x) = \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2 = 120,000$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\bar{x} - IE(x)|}{\sqrt{\frac{\text{Var}}{n}}} < \frac{10}{\sqrt{\frac{\text{Var}}{n}}}\right) = \mathbb{P}(Z < \frac{10}{\sqrt{\frac{\text{Var}}{n}}})$$

$$= \mathbb{P}(Z < \frac{10\sqrt{n}}{\sqrt{\text{Var}}}) = 1 - 2\mathbb{P}(Z > \frac{10\sqrt{n}}{\sqrt{\text{Var}}}) = 0,99 \text{ o } 0,95$$

Con 0,99

$$\mathbb{P}(Z > \frac{10\sqrt{n}}{\sqrt{120,000}}) = 0,005 \therefore \frac{10\sqrt{n}}{\sqrt{120,000}} = 2,57 \Rightarrow \sqrt{n} = 89,027 \Rightarrow n = 7925,807$$

Con 0,95

$$\mathbb{P}(Z > \frac{10\sqrt{n}}{\sqrt{120,000}}) = 0,025 \therefore \frac{10\sqrt{n}}{\sqrt{120,000}} = 1,96 \Rightarrow \sqrt{n} = 67,896 \Rightarrow n = 4609,867$$

3. a) Análogo al problema resuelto en la clase auxiliar extra, la probailidad está dada por:

$$\mathbb{P}(X_1 = 1200|X_2 = 1800) = \binom{1800}{600} \frac{1^{1200}1^{600}}{2^{1800}}$$

- b) Por incrementos independientes, se tiene que la probabilidad pedida estará dada por:

$$\mathbb{P}(X_4 = 6000|X_2 = 1800) = \frac{e^{-2 \cdot \lambda} (2 \cdot \lambda)^{4200}}{4200!}$$

Los detalles de este cálculo pueden ser consultados en la clase auxiliar del 23 de Noviembre (Clase Extra).

- c) El modelo queda descrito por el siguiente diagrama de estados:

