Universidad de Chile	Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Examen

25 de Noviembre de 2005

PROFESOR: FERNANDO LEMA
AUXILIARES: JOSÉ LUIS MALVERDE S. GABRIELA TREBITSCH T.

P1.- Se tienen k personas jugando en el siguiente juego: Se escoge un número (entero) entre 1 y n_1 y el jugador 1 trata de adivinarlo. Si acierta gana y el juego se termina. En caso contrario, se escoge un número entre 1 y n_2 y el jugador 2 trata de adivinarlo. Si acierta gana y el juego se termina. De lo contrario se continúa en forma análoga hasta que algún jugador adivine o hasta que se terminen los jugadores.
Determine $n_1, n_2.....n_k$ para que el juego sea equilibrado, es decir, para que los k jugadores tengan igual probabilidad de ganar.

P2.- La edad de un grupo de adultos puede considerarse una v.a. normal de media 46 años y desviación estándar 3 años para los hombres (X). Para las mujeres (Y) $\mu = 54$ y $\sigma^2 = 4$. Se sacan dos hombres y tres mujeres al azar. Calcule la probabilidad que las edades promedio (de H y M) difieran en menos de 2 años.
Determine c tal que: $P(X > c) = P(Y < c)$.

P3.- Sea (X,t) vector aleatorio t.q.:
$T \to e(\lambda)$ y $(X/T = t) \to P(t)$ es decir:

$P(X = k/T = t) = \frac{e^{-t}t^k}{k!}$, $k \geq 0$.

Muestre que $P(X = k) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}}$, $k \geq 0$.

Indicación: Recuerde la función Gamma.

P4.- Se dice que X tiene distribución de Weibull de parámetros α, β si:

$$f(X) = \alpha\beta X^{\beta-1}exp(-\alpha X^{\beta}), X > 0$$

Calcule $P(\sum_{i=1}^{20} X_i^2 > 12)$ si X_i (con $i = 1, ..., 20$) son v.a. Weibull de parámetros $\alpha = 2$, $\beta = 2$ y suponiendo n=20 grande.

Indicación: Determine primero la distribución (densidad) de $Y = X^2$.

P5.- Sea (X, Y) vector aleatorio tal que:

$$f_{XY}(X,Y) = \{ \begin{smallmatrix} e^{-Y} & X>0,\ Y>X \\ 0 & \sim \end{smallmatrix}$$

Calcule $P(X > 2/Y < 4)$. Son X,Y independientes?

P6.- Un famoso grupo de música va a realizar un concierto en Santiago. Se sabe que los fanáticos del grupo llegan al concierto en un tiempo distribuido exponencialmente de media 2 minutos. Al llegar, los clientes se ponen en una fila única donde deben esperar que un guardia les corte las entradas, el cual demora un tiempo exponencial de media 1 minuto. Además, cuando hay i personas en la cola (incluyendo al que está siendo atendido por el guardia) y llega un nuevo fanático, existe una probabilidad r_i de que los fanáticos rompan la reja, en cuyo caso todos los fanáticos de la cola entrarán corriendo al concierto (con $r_0 = 0$) .

Suponga que luego de caerse la reja, ésta es arreglada automáticamente y puede seguir el ingreso de fanáticos en forma regular. Modele el sistema.