Universidad de Chile	Facultad de ciencias físicas y matemáticas

Pauta Examen

PROFESOR: FERNANDO LEMA
AUXILIARES: JOSÉ LUIS MALVERDE S. GABRIELA TREBITSCH T.

P1.- Consideremos los eventos: X_i: El jugador i juega y adivina el número.

$$\mathbb{P}(X_1) = \frac{1}{n_1}$$

$$\mathbb{P}(X_2) = \mathbb{P}(X_2|X_1^c)\mathbb{P}(X_1^c) = \frac{1}{n_2}\frac{n_1-1}{n_1} = \frac{1}{n_1} \Rightarrow n_2 = n_1 - 1$$

$$\mathbb{P}(X_3) = \mathbb{P}(X_3|X_2^c X_1^c)\mathbb{P}(X_1^c X_2^c) = \frac{1}{n_3}\frac{n_2-1}{n_2}\frac{n_1-1}{n_1} = \frac{1}{n_1} \Rightarrow n_3 = n_2 - 1$$

Procediendo análogamente, se tiene que $n_{i+1} = n_i - 1$

P2.- Por propiedades de la Normal, se tiene que $\bar{X} \to N(46, \frac{9}{2})$ y $\bar{Y} \to N(54, \frac{4}{3})$, luego $(\bar{X}-\bar{Y}) \to N(-8, \frac{35}{6})$.
Entonces se tiene:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}-\bar{Y}| < 2) = \mathbb{P}(-2 < (\bar{X}-\bar{Y}) < 2) = \mathbb{P}((\bar{X}-\bar{Y}) < 2) - \mathbb{P}((\bar{X}-\bar{Y}) < -2)$$

$$= \mathbb{P}(\frac{(\bar{X}-\bar{Y})+8}{\sqrt{\frac{35}{6}}} < \frac{10}{\sqrt{\frac{35}{6}}}) - \mathbb{P}(\frac{(\bar{X}-\bar{Y})+8}{\sqrt{\frac{35}{6}}} < \frac{6}{\sqrt{\frac{35}{6}}}) = 1 - 0{,}0085 = 0{,}9915$$

Por otra parte:

$$\mathbb{P}(X < C) = \mathbb{P}(\frac{X-46}{3} > \frac{C-46}{3})$$

$$\mathbb{P}(Y > C) = \mathbb{P}(\frac{Y-54}{2} > \frac{C-54}{2})$$

Por simetría de la normal se tiene que:

$$\frac{C-46}{3} = -\frac{C-54}{2} \Rightarrow C = 50{,}8$$

P3.- Por Probabilidades totales se tiene:

$$\mathbb{P}(x=k) = \int_0^\infty \mathbb{P}(x=k|T=t)f_t(t)dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}t^k}{k!}\lambda e^{-\lambda t}dt$$

$$\mathbb{P}(x=k) = \lambda\int_0^\infty t\frac{e^{-(\lambda+1)t}t^{k-1}}{\Gamma(k)}dt$$

Pero el lado derecho de la igualdad corresponde a la esperanza de una v.a. Gamma, de parámetros $(\lambda+1)$ y k, Luego:

$$\mathbb{P}(x=k) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^k}$$

P4.- Por el teorema de cambio de variable, se tiene que $Y = X^2$ tiene la densidad:

$$f_y(y) = \alpha\beta y^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-\alpha y} \frac{1}{2\sqrt{y}} = 2e^{-2y}$$

Lo cual corresponde a una distribución exponencial, de donde se deduce que: $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$ y $VAR(Y) = \frac{1}{4}$. Por el TCL se tiene que

$$P(\frac{\sum_{i=1}^{20} X_i^2 - 10}{\sqrt{5}} > \frac{12-10}{\sqrt{5}}) = 0{,}1857$$

P5.-

$$\mathbb{P}(X > 2|Y < 4) = \frac{\mathbb{P}(X > 2, Y < 4)}{\mathbb{P}(Y < 4)} = \frac{\int_2^4 \int_x^4 e^{-y} dy dx}{\int_0^4 \int_x^4 e^{-y} dy dx} = \frac{e^{-2} - 3e^{-4}}{1 - 5e^{-4}} = 0{,}08849$$

Para ver la independencia basta notar que el rango de X depende de Y (o viceversa) luego las variables NO son independientes. (Demostrarlo haciendo uso de las densidades marginales también es válido)