Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesor Auxiliar : José Luis Malverde

EXÁMEN
15 DE JULIO 2006

1. *a*) Considere un juego en el cual participan N jugadores de la siguiente manera: Se escoge un número entre 1 y n_1, si el primer jugador lo adivina, gana y termina el juego, de lo contrario se escoge un número entre 1 y n_2 y se repite el procedimiento con el segundo jugador y así sucesivamente con los N jugadores (con n_i en el caso del jugador i).

   1) Determine la relación entre n_1, n_2, $...n_N$, para que el juego sea igualmente justo para todos los jugadores.

   2) Bajo la condición anterior, si el dueño del juego, cobra C (U.M.) a cada jugador y entrega un premio de P(U.M.) al ganador, determine el número mínimo de jugadores necesarios, para que el juego le convenga (al dueño) en promedio. Nota: Todos los jugadores deben pagar antes de que juegue el primero.

   b) Sea (X, Y) vector aleatorio tal que: $f_{XY}(x, y) = e^{-y} \quad x > 0, y > x$. Calcule $\mathbb{P}(X > 2|Y < 4)$ y $\mathbb{E}(X|Y)$.

2. *a*) Dos grandes poblaciones de hombres y mujeres tienen estaturas (H, M) v.a. tal que $H \to N(1{,}7; 0{,}1^2)$ y $M \to N(1{,}6; 0{,}05^2)$. Si se escoge un individuo al azar y resulta con estatura superior a 1.68; calcule la probabilidad que sea hombre. ?Cómo cambia su respuesta si resulta con estatura igual a 1.68?

   b) El ingreso mensual de las personas (X) puede considerarse una v.a. producto de muchas variables independientes (sexo, edad, educación, etc.) es decir $X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 ... X_n$ con $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ y $V(X_i) = \sigma_i^2$. Determine (para n grande) la densidad de X.

3. A un exámen oral llegan alumnos según un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 5[\frac{alumnos}{hora}]$.

   a) Si entre las 00:00 hrs. y las t:00 hrs. han llegado n alumnos; calcule la probabilidad que entre las 0:00 hrs. y s:00 hrs. hayan llegado k alumnos ($\forall s, t$, $\forall k, n$).

b) Antes de rendir el exámen los alumnos han sido clasificados en dos categorías: los buenos alumnos y los regulares. Los buenos alumnos serán examinados por el Profesor Auxiliar, mientras que los alumnos regulares serán evaluados por una comisión de Profesores. En caso de que el Profesor Auxiliar, tras examinar a un alumno se declare "incompetente", el alumno deberá esperar para ser evaluado por la comisión de Profesores. Se sabe que el Profesor Auxiliar examina según un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\mu_a} = 5$[minutos], mientras que la comisión examina según un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\mu_c} = 15$ [minutos]. Además se sabe que un alumno es bueno con probabilidad p y que el Profesor Auxiliar se declarará incompetente con probabilidad q. Suponiendo que los alumnos al llegar se ponen en dos filas, una para cada instancia de examinación(sin restricciones de capacidad):

1) Modele el sistema y dibuje el diagrama de estados.

2) Suponiendo conocidas la Probabilidades estacionarias, calcule el tiempo promedio de espera de un alumno regular (desde que llega hasta que es examinado).