Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra	:	Fernando Lema
Profesor Auxiliar	:	José Luis Malverde

Pauta Examen

15 de Julio 2006

1. *a)* 1) Impondremos que la probabilidad de que gane el primero es igual a la probabilidad de que gane el segundo: $\frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2}\frac{n_1-1}{n_1} \Rightarrow n_2 = n_1 - 1$. Para que gane el i-ésimo se debe imponer que los (i-1) jugadores anteriores pierdan, luego se tiene: $\frac{1}{n_i}\frac{n_{i-1}-1}{n_{i-1}}\frac{n_{i-2}-1}{n_{1-2}}\cdots$ de donde se deduce que: $n_i = n_{i-1} - 1$.

   2) El juego quedará completamente determinado por n_1 y N, donde N es el número de jugadores. La utilidad para el dueño será: NC en caso de que ninguno gane y $NC - P$ en caso de que alguno gane. Imponiendo la condición anterior (que todos tienen igual probabilidad de ganar), se tiene que:

   $$\mathbb{P}(algunogane) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(igana) = N \cdot \frac{1}{n_1}$$

   La utilidad queda dada por: $U = (NC-P)\frac{N}{n_1} + NC(1-\frac{N}{n_1})$. Imponiendo $U > 0$ se tiene que: $n_1 > \frac{P}{C}$ o equivalentemente $N > \frac{P}{C} - n_N$.

   b) Calculemos:

   $$\mathbb{P}(X > 2|Y < 4) = \frac{\mathbb{P}(X > 2 \wedge Y < 4)}{\mathbb{P}(Y < 4)}$$

   Determinamos la marginal de Y: $f_Y(y) = \int_0^y e^{-y}dx = ye^{-y}$. Luego:

   $$\mathbb{P}(X > 2|Y < 4) = \frac{\int_2^4 \int_x^4 e^{-y}dydx}{\int_0^4 ye^{-y}dy}$$

   Para calcular la esperanza condicional determinamos la densidad condicional:

   $$f_{X|Y}(x|Y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y}$$

   Luego:

   $$\mathbb{E}(X|Y) = \int_0^y \frac{1}{y}dx = 1$$

2. *a*) Consideremos los eventos: H: la persona es hombre, M: la persona es mujer (con X_H y X_M las estaturas asociadas. Se quiere calcular: $\mathbb{P}(H|X > 1{,}68)$ por bayes se tiene:

$$\mathbb{P}(H|X > 1{,}68) = \frac{\mathbb{P}(X > 1{,}68|H)\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(X > 1{,}68)}$$

Como suponemos dos poblaciones muy grandes consideramos $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(M) = \frac{1}{2}$, además, por probabilidades totales se tiene: $\mathbb{P}(X > 1{,}68) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X_H > 1{,}68) + \mathbb{P}(X_M > 1{,}68))$ Haciendo uso de las propiedades de la función Normal se tiene:

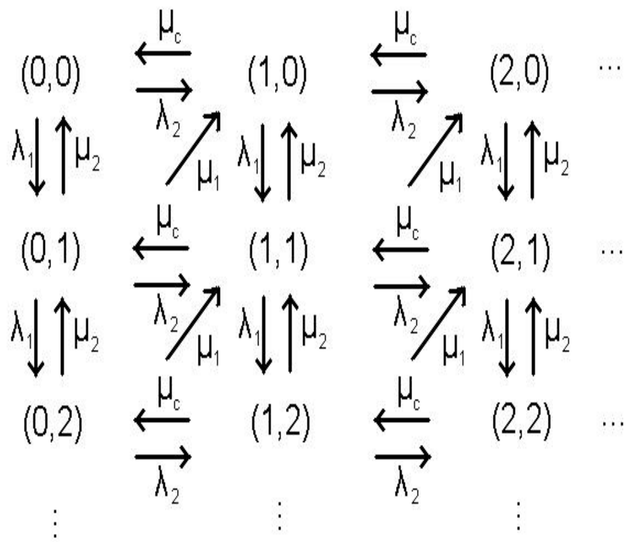
$$\mathbb{P}(H|X > 1{,}68) = \frac{\mathbb{P}(z > \frac{1{,}68-1{,}7}{0{,}1})}{\mathbb{P}(z > \frac{1{,}68-1{,}7}{0{,}1}) + \mathbb{P}(z > \frac{1{,}68-1{,}6}{0{,}05})}$$

Donde z es una v.a. Normal (0,1) y por ende los valores de tales probabilidades pueden ser obtenidos de la tabla.
En caso de considerar la estatura igual a 1.68 para poder usar Bayes se utilizan las densidades en vez de calcular las probabilidades.

b) Consideremos $Y = Ln(X) = \sum_{i=1}^{n} Ln(X_i)$ por el T.C.L. $Y \to N(\sum \bar{\mu}_i, \sum \bar{\sigma}_i^2)$, luego haciendo cambio de variables $f_X(x) = f(Ln(X)) \cdot \frac{1}{X}$ donde f corresponde a la densidad de la Normal de parámetros ($\mu = \sum \bar{\mu}_i, \sigma^2 = \sum \bar{\sigma}_i^2$) donde $\bar{\mu}_i$ y $\bar{\sigma}_i^2$ pueden ser determinados conociendo las densidades de las v.a. X_i.

3. *a*) Debemos separar en 4 casos:
   - $s > t$, $k < n$: $\mathbb{P}(X_s = k|X_t = n) = 0$
   - $s < t$, $k > n$: $\mathbb{P}(X_s = k|X_t = n) = 0$
   - $s > t$, $k > n$: $\mathbb{P}(X_s = k|X_t = n) = \mathbb{P}(X_{s-t} = k-n) = \frac{e^{-\lambda(s-t)}(\lambda(s-t))^{k-n}}{(k-n)!}$
   - $s < t$, $k < n$: $\mathbb{P}(X_s = k|X_t = n) = \frac{\mathbb{P}(X_s=k \wedge X_{t-s}=n-k)}{\mathbb{P}(X_t=n)} = \binom{n}{k}\frac{s^k(t-s)^{n-k}}{t^n}$

   b) 1) Designemos $\lambda_1 = \lambda p$, $\lambda_2 = \lambda(1-p)$, $\mu_1 = \mu_a q$, $\mu_2 = \mu_a(1-q)$. Con esto el modelo queda dado por:



2) Basta notar que el largo promedio está dado por: $L = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} i \cdot P_{i,k}$ y por ende el tiempo promedio estará dado por $W = \frac{L}{\lambda\cdot(1-p)}$.