

## Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema  
Profesores Auxiliares : José Luis Malverde  
: Evelyn Andaur

### TAREA 3

PRIMAVERA 2006

ENTREGA 06 NOVIEMBRE 2006

- 1) Considere una sucesión de variables aleatorias  $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$  tales que  $\mathbb{E}(Y_i) = \rho^i$  y  $Var(Y_i) = \sigma_i^2$ . Sea  $X$  v.a discreta tal que:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2}^k \quad k = 1, 2, \dots$$

Para la v.a.  $Z = \sum_{i=1}^X Y_i$ , determine  $\mathbb{E}(X)$ .

- 2) Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio. Se define el coeficiente de correlación entre  $X$  y  $Y$ , denotado por  $\rho_{XY}$ , como:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))\}}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

- a) Muestre que si  $X, Y$  son independientes entonces  $\rho_{XY} = 0$ .
- b) Muestre, por medio de un ejemplo, que si  $\rho_{XY} = 0$  no implica que  $X, Y$  son independientes.
- c) Muestre que  $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ .
- d) Muestre que  $Y = a + bX$  si y sólo si  $\rho_{XY} = 1$ .

HINT: ver Meyer

- 3) Sean  $X_1 \rightarrow N(\mu, \sigma^2), X_2 \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ , independientes.  
Considere  $Z(t) = X_1 \cdot \cos(wt) + X_2 \cdot \sin(wt)$ ,  $V(t) = \frac{\delta Z(t)}{\delta t}$ .

- a) Determine la distribución de  $Z(t)$  y  $V(t)$  ( $t$  fijo).
- b) Muestre que  $\rho_{ZV} = 0$ .

- 4) Considere una v.a.  $X$  con distribución Beta de parámetros  $\alpha, \beta$  ( $X \rightarrow Be(\alpha, \beta)$ )

- a) Si  $X \rightarrow Be(\alpha, \beta)$  calcule  $\mathbb{E}(X)$  y  $Var(X)$ .
- b) Sean  $Y_1 \rightarrow G(\alpha_1, \beta)$ ,  $Y_2 \rightarrow G(\alpha_2, \beta)$  v.a. independientes. Muestre que:  $U = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \rightarrow Be(\alpha_1, \alpha_2)$  y que  $U$  es independiente de  $V = Y_1 + Y_2$ .
- c) Suponga que la proporción  $X$  de artículos defectuosos, en un gran lote, es desconocida y que  $X \rightarrow Be(\alpha, \beta)$ . Si se selecciona al azar un artículo del lote, ¿cuál es la probabilidad que sea defectuoso?
- 5) Sea  $X$  una v.a discreta con  $R_X \subset \mathbb{N}$ . Se define la función generadora de probabilidades como:

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

- a) Determine  $G_X^{(n)}(z)|_{z=0}$ .
- b) Calcule  $G_X(z)$  si  $X \rightarrow P(\lambda)$ .
- 6) Sean  $X_i \rightarrow U(0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , independientes. Determine usando la función generadora de momentos la distribución de la v.a.:  $Y = -2 \cdot \ln(\prod_{i=1}^n X_i)$ . ¿Cuál es la distribución para  $n$  grande? Calcule  $\mathbb{P}(y > 55)$  si  $n = 40$ .
- 7) Sea  $X$  una v.a. tal que  $\mathbb{E}(x^k) = (k+1)!2^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Determine, usando la F.G.M. la distribución de  $X$ .
- 8) Suponga que  $X$  es una v.a. con la siguiente f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda(x-a)} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

- a) Encontrar la f.g.m. de  $x$  y, usando ésta, encontrar  $E(x)$ .  
Nota: Esta f.d.p. se denomina exponencial desplazada.
- b) Suponga que la duración de una ampolleta es una v.a. con la f.d.p. definida en la parte anterior. Cuando una ampolleta falla es reemplazada por una nueva con la misma f.d.p. Encuentre el número necesario de ampolletas para asegurar el funcionamiento del sistema por más de 400 horas con probabilidad 0,95 (considere  $\lambda = \frac{1}{2}$  y  $a = 6$ ).
- 9) Un embarque de televisores consta de 50 lotes de 1000 TV cada uno. De cada lote, se examina una muestra de 80 televisores (en forma independiente), contándose el número de defectuosos. Si el fabricante asegura que la probabilidad que un televisor sea defectuoso es 0,01; calcule la probabilidad que se encuentran más de 30 televisores defectuosos en los 50 lotes.
- 10) a) Dos grandes poblaciones de hombres y mujeres tienen estaturas  $(H, M)$  v.a. tal que  $H \rightarrow N(1.7; 0.1^2)$  y  $M \rightarrow N(1.6; 0.05^2)$ . Si se escoge un individuo al azar y resulta

con estatura superior a 1.68; calcule la probabilidad que sea hombre. ¿Cómo cambia su respuesta si resulta con estatura igual a 1.68?

- b) El ingreso mensual de las personas ( $X$ ) puede considerarse una v.a. producto de muchas variables independientes (sexo, edad, educación, etc.) es decir  $X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \dots X_n$  con  $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$  y  $V(X_i) = \sigma_i^2$ . Determine (para  $n$  grande) la densidad de  $X$ .
- 11) La edad en una gran población de adultos es una v.a. normal de media 46 años y desviación estándar 8 años.
- a) Si de la población se extraen  $n$  individuos obteniéndose por lo menos uno menor a 50 años, calcule la probabilidad de obtener al menos uno mayor a 50 años.
- b) Si se toman dos adultos, cuál es la probabilidad que sus edades difieran en menos de 1 año?
- 12) Una máquina trabaja un tiempo (antes de fallar) que puede ser modelado como una v.a.  $e(\lambda)$ . Cuando falla, la reparación toma un tiempo aleatorio, que se distribuye  $e(\mu)$ . Si la máquina está buena en  $t=0$ , calcule la probabilidad que lo esté en el instante  $t$ . Indicación: Considere el proceso:

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{máquina buena en } t \\ 1 & \text{máquina mala en } t \end{cases}$$

Plantee y resuelva las ecuaciones diferenciales.

- 13) Los alumnos llegan a un negocio de fotocopias según un proceso de Poisson de tasa 2 por minuto.
- a) (i) Si en un intervalo de 5 minutos llegaron 8 alumnos, calcule la probabilidad de que sólo uno de ellos haya llegado en el último minuto.
- (ii) Calcule la probabilidad de que el tiempo entre dos alumnos supere los tres minutos.
- b) El negocio funciona con tres fotocopadoras y la atención de un alumno es exponencial de media 2 minutos. Cuando un alumno llega y observa a cuatro compañeros se va a otro negocio.
- (i) Si  $X_t$  :  $N^\circ$  de alumnos en el negocio; plantee el diagrama de estados y ecuaciones de balance.

- (ii) Si  $P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0$ ,  $P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}P_0$ ,  $P_3 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3}P_0$ ,  $P_4 = \frac{\lambda^4}{24\mu^4}P_0$ , es solución de las ecuaciones, calcule numéricamente el tiempo promedio que demora un alumno en el negocio y la proporción de tiempo ocioso que tienen las máquinas.
- c) De las tres fotocopadoras, dos son “corrientes” y una “especial”. Cada fotocopadora corriente funciona un tiempo exponencial de media 1 hora y su reparación demora una media de 15 minutos atendida por una persona. La fotocopadora especial funciona un tiempo exponencial de media 1,5 horas y su reparación demora 20 minutos atendida por dos personas. Existen dos personas para reparar las máquinas. Modele el sistema de reparación de fotocopadoras planteando el proceso en estudio y diagrama de estados.
- 14) La sala de emergencia de un consultorio atiende con dos equipos médicos y no admite cola (los pacientes que no logran ingresar a esta sala deben ir a otro consultorio). A la sala llegan dos tipos de pacientes: los paciente tipo A, a una tasa de 4 por hora y los tipo B, a una tasa de 2 por hora. Cada paciente tipo A que llega recibe atención de algún equipo médico desocupado, demorándose un tiempo exponencial de media 15 minutos. Cada paciente tipo B que entra requiere la atención simultánea de los dos equipos, demorándose un tiempo exponencial de media 40 minutos.
- a) Plantee el proceso a estudiar, indicando los estados, el diagrama y las ecuaciones de balance.
- b) Suponiendo que tiene resueltas las ecuaciones de balance, indique cómo calcularía la proporción de pacientes que no ingresa a la sala, y el tiempo promedio que cada equipo médico está ocioso (considere un turno de 24 horas). ¿Cómo cambia su modelo (diagrama de estados) si uno de los equipos médicos es más lento demorándose en promedio 30 minutos (cuando atiende solo), manteniéndose el resto de las condiciones?
- 15) A una gasolinera que cuenta con sólo una bomba de bencina, llegan vehículos según un proceso de Poisson de tasa 15 autos por hora.
- a) Si entre las 12:00 y 13:00 pm. llegaron 15 vehículos, calcule la probabilidad de que entre las 12:50 y 13:00 hayan llegado al menos dos vehículos.
- b) Suponga ahora que el tiempo que se necesita para atender un vehículo es exponencial de media 5 minutos. Si la bomba se está usando, los clientes pueden desistir (no ingresan y se van); en particular si hay  $n$  autos en la gasolinera, la probabilidad de que un cliente potencial que llega desista es  $q_n$ .
- (i) Plantee el diagrama de estados y ecuaciones de balance para el proceso “Número de vehículos en la gasolinera”.

(ii) Suponiendo

$$q_n = \begin{cases} \frac{n}{3} & n=0,1,2,3 \\ 1 & n > 3 \end{cases}$$

Resuelva las ecuaciones de balance. Calcule el tiempo promedio que un vehículo permanece en la gasolinera y la proporción de vehículos que llegan pero no ingresan.

---

jlmalver@dim.uchile.cl  
eandaur@ing.uchile.cl