

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesores Auxiliares : José Luis Malverde
: Evelyn Andaur

TAREA 3

PRIMAVERA 2006

ENTREGA 06 NOVIEMBRE 2006

- 1) Considere una sucesión de variables aleatorias $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que $\mathbb{E}(Y_i) = \rho^i$ y $Var(Y_i) = \sigma_i^2$. Sea X v.a discreta tal que:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2}^k \quad k = 1, 2, \dots$$

Para la v.a. $Z = \sum_{i=1}^X Y_i$, determine $\mathbb{E}(X)$.

- 2) Sea (X, Y) un vector aleatorio. Se define el coeficiente de correlación entre X y Y , denotado por ρ_{XY} , como:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))\}}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

- a) Muestre que si X, Y son independientes entonces $\rho_{XY} = 0$.
- b) Muestre, por medio de un ejemplo, que si $\rho_{XY} = 0$ no implica que X, Y son independientes.
- c) Muestre que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.
- d) Muestre que $Y = a + bX$ si y sólo si $\rho_{XY} = 1$.
- 3) Sean $X_1 \rightarrow N(\mu, \sigma^2), X_2 \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$, independientes. Considere $Z(t) = X_1 \cdot \cos(wt) + X_2 \cdot \sin(wt)$, $V(t) = \frac{\delta Z(t)}{\delta t}$.
- a) Determine la distribución de $Z(t)$ y $V(t)$ (t fijo).
- b) Muestre que $\rho_{ZV} = 0$.
- 4) Considere una v.a. X con distribución Beta de parámetros α, β ($X \rightarrow Be(\alpha, \beta)$)
- a) Si $X \rightarrow Be(\alpha, \beta)$ calcule $\mathbb{E}(X)$ y $Var(X)$.

b) Sean $Y_1 \rightarrow G(\alpha_1, \beta)$, $Y_2 \rightarrow G(\alpha_2, \beta)$ v.a. independientes. Muestre que: $U = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \rightarrow Be(\alpha_1, \alpha_2)$ y que U es independiente de $V = Y_1 + Y_2$.

c) Suponga que la proporción X de artículos defectuosos, en un gran lote, es desconocida y que $X \rightarrow Be(\alpha, \beta)$. Si se selecciona al azar un artículo del lote, ¿cuál es la probabilidad que sea defectuoso?

5) Sea X una v.a discreta con $R_X \subset \mathbb{N}$. Se define la función generadora de probabilidades como:

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

a) Determine $G_X^{(n)}(z)|_{z=0}$.

b) Calcule $G_X(z)$ si $X \rightarrow P(\lambda)$.

6) Sean $X_i \rightarrow U(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$, independientes. Determine usando la función generadora de momentos la distribución de la v.a.: $Y = -2 \cdot \ln(\prod_{i=1}^n X_i)$. ¿Cuál es la distribución para n grande? Calcule $\mathbb{P}(y > 55)$ si $n = 40$.

7) Sea X una v.a. tal que $\mathbb{E}(x^k) = (k+1)!2^k$, $k = 1, 2, \dots$. Determine, usando la F.G.M. la distribución de X .

8) Suponga que X es una v.a. con la siguiente f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda(x-a)} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

a) Encontrar la f.g.m. de x y, usando ésta, encontrar $E(x)$.

Nota: Esta f.d.p. se denomina exponencial desplazada.

b) Suponga que la duración de una ampolleta es una v.a. con la f.d.p. definida en la parte anterior. Cuando una ampolleta falla es reemplazada por una nueva con la misma f.d.p. Encuentre el número necesario de ampolletas para asegurar el funcionamiento del sistema por más de 400 horas con probabilidad 0,95 (considere $\lambda = \frac{1}{2}$ y $a = 6$).

9) a) Sea X v.a. con F.G.M. $M_X(t)$. Calcule:

$$\frac{d^2 \log(M_X(t))}{dt^2} \Big|_{t=0}$$

b) Sea X v.a. con densidad $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$ $-\infty < x < \infty$

Determine la función generadora de momentos de X .

10) Un embarque de televisores consta de 50 lotes de 1000 TV cada uno. De cada lote, se examina una muestra de 80 televisores (en forma independiente), contándose el número de

defectuosos. Si el fabricante asegura que la probabilidad que un televisor sea defectuoso es 0,01; calcule la probabilidad que se encuentran más de 30 televisores defectuosos en los 50 lotes.

- 11) a) Dos grandes poblaciones de hombres y mujeres tienen estaturas (H, M) v.a. tal que $H \rightarrow N(1.7; 0.1^2)$ y $M \rightarrow N(1.6; 0.05^2)$. Si se escoge un individuo al azar y resulta con estatura superior a 1.68; calcule la probabilidad que sea hombre. ¿Cómo cambia su respuesta si resulta con estatura igual a 1.68?
- b) El ingreso mensual de las personas (X) puede considerarse una v.a. producto de muchas variables independientes (sexo, edad, educación, etc.) es decir $X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \dots X_n$ con $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ y $V(X_i) = \sigma_i^2$. Determine (para n grande) la densidad de X .
- 12) La edad en una gran población de adultos es una v.a. normal de media 46 años y desviación estándar 8 años.
 - a) Si de la población se extraen n individuos obteniéndose por lo menos uno menor a 50 años, calcule la probabilidad de obtener al menos uno mayor a 50 años.
 - b) Si se toman dos adultos, cuál es la probabilidad que sus edades difieran en menos de 1 año?

jlmalver@dim.uchile.cl
eandaur@ing.uchile.cl