

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesores Auxiliares : José Luis Malverde
: Evelyn Andaur

PAUTA CONTROL 1

28 DE AGOSTO 2006

1. a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c \cap B^c) &= \mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

De la igualdad anterior se deduce que los complementos son independientes.

b) Razonemos por contradicción:

$$\forall i = 1..k, \mathbb{P}(A_i|B) < \mathbb{P}(A_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(B)$$

Por otro lado:

$$\mathbb{P}(A_i \cap B) < \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B) < \mathbb{P}(B) \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(B)$$

Lo cual es claramente una contradicción.

c) Notemos que se deben elegir todos los posibles grupos de k conjuntos, con $k = 2...n$, lo cual queda dado por:

$$\sum_{i=2}^n \binom{n}{i} = 2^n - n - 1$$

d) Basta notar que es análogo a la definición de probabilidad a partir de frecuencias, por lo que quedaría:

$$\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$$

e) Análogo al problema realizado en cátedra, basta fijar un pastel de cada tipo y luego elegir los otros 6. Esto último corresponde a la combinación con elementos repetidos y está dado por:

$$C_6^{12} = \binom{12}{6}$$

2. a) Sean los eventos:

C : El acusado es culpable.

D_c : el acusado es declarado culpable,

I : El jurado se declara incompetente.

Usando Bayes tenemos que:

$$\mathbb{P}(C|D_c) = \frac{\mathbb{P}(D_c|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(D_c)}$$

Calculemos: $\mathbb{P}(C) = 0,6$ por enunciado, $\mathbb{P}(C|D_c) = 0,7 + 0,1 \cdot 0,8$ es decir la probabilidad de que sea declarado culpable o que sea pasado al segundo juzgado y este lo declare culpable. Por último se obtiene de manera análoga $\mathbb{P}(D_c) = \mathbb{P}(D_c|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D_c|C^c)\mathbb{P}(C^c) = (0,7 + 0,1 \cdot 0,8) \cdot 0,6 + (0,1 + 0,1 \cdot 0,5) \cdot 0,4$. Reemplazando en la fórmula anterior se obtiene la Probabilidad pedida.

- b) Denotemos por D el primer conjunto extraído y C el segundo. Por probabilidades totales, condicionando con respecto a la primera extracción se tiene:

$$\mathbb{P}(C \subseteq D) = \sum_{i=0}^N \mathbb{P}(C \subseteq D | |D| = i) \mathbb{P}(|D| = i)$$

Suponiendo quiprobabilidad se tiene que existen 2^N subconjuntos de Ω equiprobables, de los cuales $\binom{N}{i}$ tienen cardinalidad i , por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C \subseteq D) &= \sum_{i=0}^N \frac{2^i}{2^N} \frac{\binom{N}{i}}{2^N} \\ &= \frac{1}{2^{2N}} \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} 2^i 1^{N-i} = \frac{3^N}{4^N} = \left(\frac{3}{4}\right)^N \end{aligned}$$

3. a) 1) Consideramos $\Omega = \{(X_1, X_2, \dots, X_5) | X_i = (X_i^D, X_i^N), X_i^D \in \{P_1, \dots, P_4\}, X_i^N \in \{1, 2, \dots, 13\}\}$. Tenemos que $Card(\Omega) = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = P_5^{52}$ y los casos favorables son: (A: Obtener color) $Card(A) = (13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9) \cdot 4 = P_5^{13} \cdot 4$. La probabilidad pedida estará dada por el cociente.
- 2) Consideramos B: Obtener escala. Calculamos primero la cardinalidad de la escala $\{As, 2, 3, 4, 5\}$, esta es $4^5 \cdot 5!$ como las escalas posibles son 10, se tiene que $Card(B) = 4^5 \cdot 5! \cdot 10$ siendo la cardinalidad de Ω la indicada en la parte anterior.
- 3) Sea C: Obtener dos pares. Se calcula primero los casos de obtener un par y luego un segundo par, los posibles ordenamientos de estos y las formas de seleccionar los dos pares, por lo que $Card(C) = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 44 \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot \binom{13}{2}$.

b) Sea D: Al menos un mono no sale.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(J^c \cup Q^c \cup K^c) = \mathbb{P}(J^c) + \mathbb{P}(Q^c) + \mathbb{P}(K^c) \\ &\quad - \mathbb{P}(J^c \cap Q^c) - \mathbb{P}(J^c \cap K^c) - \mathbb{P}(Q^c \cap K^c) + \mathbb{P}(J^c \cap Q^c \cap K^c)\end{aligned}$$

Notemos que todos los casos son similares por lo que bastará dar algunas probabilidades y las demás serán iguales:

- $\mathbb{P}(J^c) = (\frac{48}{52})^5 = \mathbb{P}(Q^c) = \mathbb{P}(K^c).$
- $\mathbb{P}(J^c \cap Q^c) = (\frac{44}{52})^5 = \mathbb{P}(J^c \cap K^c) = \mathbb{P}(Q^c \cap K^c).$
- $\mathbb{P}(J^c \cap Q^c \cap K^c) = (\frac{40}{52})^5.$

$$\text{Luego } \mathbb{P}(D) = 3(\frac{48}{52})^5 - 3(\frac{44}{52})^5 + (\frac{40}{52})^5.$$