

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesor Auxiliar : José Luis Malverde
Evelyn Andaur E.

TAREA 1 **Primavera 2006** **Entrega: 28 Agosto 2006**

P1.-

Considere un mazo de naipes.

a) Se extraen 4 cartas al azar con reemplazo. Calcule la probabilidad:

- 1) Que las 4 sean, rojas o pares.
- 2) Que las 4 sean rojas, o las 4 sean pares.

b) Se extraen 6 cartas sin reemplazo. Calcule la probabilidad:

- 1) Que al menos 4 sean, rojas o pares.
- 2) Que al menos 4 sean rojas, o al menos 4 sean pares.

P2.-

En una determinada región, 7 radioemisoras transmiten de jueves a domingo entre las 21:00 y 22:00 horas, cada una un programa distinto (5 transmiten noticias los jueves, 4 los viernes, 3 los sábados y 2 los domingos). Usted escucha radio:

- a) Cuántas secuencias de programas, solo de noticias, puede oír de jueves a domingo?
- b) Cuántas secuencias de programas, con al menos dos de noticias puede oír?
- c) Usted dispone de cinta y tiempo para grabar en dos de los cuatro días, tres programas simultáneamente. Cuántas configuraciones puede grabar?
- d) Si la elección de radios es al azar, calcule:

- 1) La probabilidad que escuche radios distintas.
- 2) La probabilidad que escuche la misma radio.

P3.-

La restricción vehicular normal consiste en la designación de dos dígitos (último dígito en patentes de vehículos) que no pueden circular un día determinado de la semana.

- a) ¿De cuántas maneras se podría programar la restricción vehicular para una semana? Plantee el espacio muestral.
- b) Si la restricción es programada al azar, ¿cuál es la probabilidad que el día lunes queden dígitos consecutivos?, ¿cuál es la probabilidad que todos los días queden con dígitos consecutivos?
- c) Si usted tiene 5 vehículos con dígitos distintos (por ejemplo 1,2,3,4,5), calcule la probabilidad que todos los días quede un vehículo con restricción.

P4.-

Suponga que una persona está situada a N cuadras al sur, y a M cuadras al oeste de la esquina a la cual quiere llegar.

a) ¿Cuántos caminos "inteligentes" existen entre ambos puntos? (Camino "inteligente" se entenderá por aquel que sólo consta de desplazamientos que acercan al destino, es decir, unitarios de una cuadra tanto en dirección norte como este)

b) Considere $M=N$. Fijándose que para llegar a destino en este caso, el camino elegido debe pasar por alguna intersección de las que forman la diagonal secundaria del cuadrículado; calcule la suma de los cuadrados de los coeficientes binomiales sobre N .

Nota: En todo el problema, considere que las calles no terminan dentro del cuadrículado, o sea, todo camino "inteligente" es susceptible de ser realizado.

P5.-

En el ascensor de un edificio de n pisos hay m personas. Suponiendo que las personas se bajan en cualquier piso con igual probabilidad y sin importar lo que haga el resto de los pasajeros, calcule la probabilidad que:

a) m_1 personas se bajen en el primer piso, m_2 en el segundo, ..., m_n en el n -ésimo piso, donde $m_i \in \{0,1,\dots,m\} \forall i \in \{1,\dots,n\}$ y $\sum_{i=1}^n m_i = m$.

b) Todas las personas se bajen en pisos diferentes.

c) Determine el número de formas en que se pueden bajar las m personas

si: i) Las personas son distinguibles.

ii) Las personas son indistinguibles (clones).

P6.-

Usted y su mejor amigo juegan a la ruleta rusa de forma tal que después de cada intento (disparo) se hace girar la rueda del revólver.

a) Si la rueda tiene capacidad para 6 balas y se pone sólo una, calcule la probabilidad que el jugador que comienza el juego muera. Indique el espacio muestral usado.

b) Suponga que usted tiene un súper revólver con la capacidad que desee (con respecto al número de balas) y que, además, puede elegir la cantidad de balas que pondrá en el súper revólver para jugar. Bajo estas condiciones. ¿Es posible lograr que el juego sea equilibrado?

P7.-

Suponga que usted posee un mazo de cartas inglesas sin comodines, y escoge cinco cartas del mazo al azar. Calcule la probabilidad que:

a) Obtenga cuatro cartas con el mismo número.

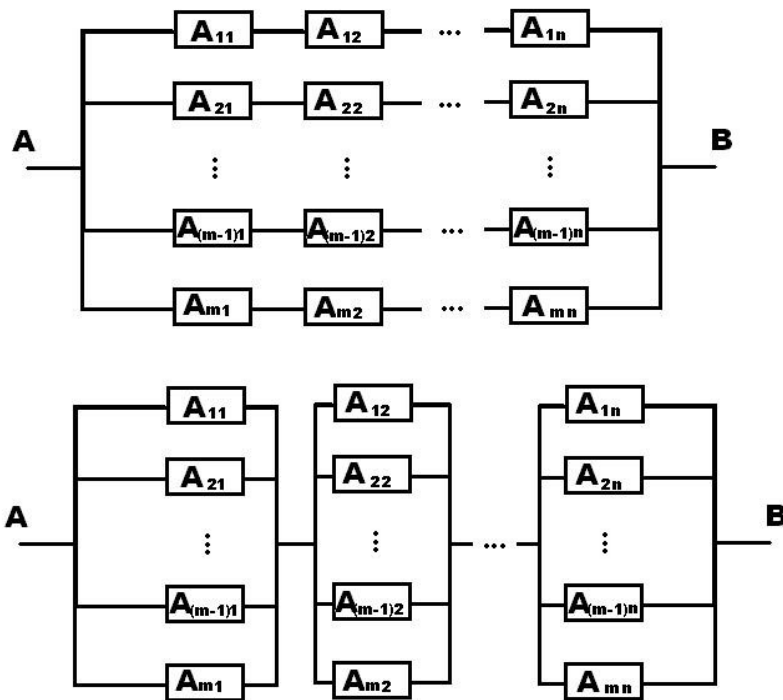
b) Obtenga las cinco cartas consecutivas (ie, una escala. La escala 10,J,Q,K, Az no es permitida)

c) Obtenga las cinco cartas de la misma pinta (ie, obtenga color).

d) Obtenga una escalera como en b), pero con las cinco cartas de la misma pinta como en c) (ie, obtenga una escalera de color).

P8.-

Considere los circuitos:



Las componentes A_{ij} tienen una probabilidad p de funcionar ($(1 - p)$ de fallar) y lo hacen en forma independiente. Calcule para ambos circuitos la probabilidad que exista flujo desde el punto A hasta el punto B.

P9.-

Para predecir el tiempo un día es clasificado como seco o lluvioso. Por experiencia se sabe que la probabilidad que un día sea igual al anterior se asume constante e igual a p .

a) Si el 1° de abril es seco con probabilidad β muestre que la probabilidad que el n -ésimo día del año (contado a partir del 1° de abril) sea seco (P_n) queda dada por:

$$P_n = \left[\left(\beta - \frac{1}{2} \right) (2p-1)^{n-1} \right] + \frac{1}{2}$$

b) Si el 16 de abril está seco calcule la probabilidad que el 14 de abril también lo haya estado. Para esto considere $\beta=1$ y $p=\frac{9}{10}$

P10.- Cierta enfermedad congénita se transmite a la descendencia de modo que si uno de los padres presenta el gen 27 del tipo tripoide, cada hijo tiene probabilidad α de enfermar si éste era de su padre y β si era de su madre; si ambos presentan el gen es seguro que enfermará. Por otro lado se sabe que la enfermedad no aparece espontáneamente y que cada padre tiene una probabilidad p de presentar el gen (independientemente).

a) Si una persona está enferma ¿cuál es la probabilidad que esta enfermedad haya sido transmitida sólo por la madre?

b) Suponga un segundo hijo (hermano del anterior). Calcule la probabilidad que esté enfermo si se sabe que su hermano lo está. ¿Qué puede decir de los eventos “primer hijo enfermo” y “segundo hijo enfermo”?

P11.- a) En una elección N votantes votan por los candidatos A o B , lanzando una moneda perfecta y en forma independiente. Si se sabe que A obtuvo n votos y B obtuvo m votos, calcule la probabilidad que el último voto haya sido para A . Cómo cambia la respuesta si la moneda no es perfecta?

b) Se sabe que A recibe n votos y B recibe m votos, con $n > m$. El objetivo de esta parte es probar que la probabilidad de que A siempre esté por delante de B en el conteo de votos, que denominaremos $p_{n,m}$, vale $\frac{n-m}{n+m}$ (1) Sea $E_{n,m}$ el evento “ A siempre va adelante de B en el conteo de votos cuando A recibió n votos y B recibió m votos”, luego $p_{n,m} = P(E_{n,m})$ Condicione con respecto al quien recibió el último voto y llegue a una relación de recurrencia. Por último muestre que (1) es solución de la recurrencia encontrada. (Asuma que todos los ordenamientos de los votos son igualmente probables)

P12.- Cuando una máquina productiva está correctamente ajustada produce el 80% de los artículos de alta calidad y el resto de calidad media, en cambio cuando la máquina está mal ajustada sólo produce el 40% de alta calidad. Suponga que el 30% de los días la máquina está mal ajustada.

a) Se escogen 3 artículos producidos un día cualquiera encontrándose 2 de alta calidad y 1 de calidad media. Calcule la probabilidad que ese día la máquina estuviera correctamente ajustada.

b) Bajo el mismo enunciado original, suponga ahora que un operario revisa todos los artículos sacando los de calidad media según su parecer. Si un artículo es de

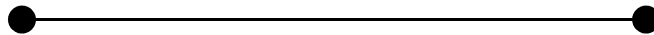
alta calidad existe una probabilidad 0.05 que el operario la considere de calidad media; en cambio, si es de calidad media lo detecta con probabilidad 0.9.

Los artículos puestos a la venta son aquellos catalogados de alta calidad por el operario.

Sí un artículo es comprado por un cliente que reclama diciendo que le vendieron un artículo de calidad media, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la razón?

P13.- Suponga que en un juego usted gana un partido con probabilidad P . Cuando gana su capital se dobla y cuando pierde su capital se reduce a la mitad.

Si comienza con C [UM] de capital y juega n partidos independientes, determine la probabilidad de que la utilidad sea de M (U.M.) después de n juegos (especifique los valores de M para los cuales está bien definida la probabilidad)



jlmalver@dim.uchile.cl
eandaur@ing.uchile.cl