

## Guía para el examen- MA34A

### Primavera del 2006

PROFESOR: SERVET MARTÍNEZ

AUXILIARES: BOLIVAR DÍAZ, FRANCISCO SILVA

**P1.** Sean  $X_1, X_2$  v.a uniformes en  $[0, 1]$  e independientes.

a) Sea  $X_3 = X_1 + X_2$ . Calcule  $f_{X_3}$ .

b) Sea  $X_3 = X_1 X_2$ . Calcule  $f_{X_3}$ .

c) Sea  $X_3 = \max\{X_1, X_2\}$ . Calcule  $f_{X_3}$ .

d) Sea  $X_3 = \frac{X_2}{X_1}$ . Calcule  $f_{X_3}$ .

e) Sea  $X_3 = \frac{\max\{X_1, X_2\}}{\min\{X_1, X_2\}}$ .

**P2.** Sean  $X_1, X_2$  y  $X_3$  normales de media 0 y varianza 1 independientes. Sea  $X_4 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$ . Calcule  $f_{X_4}$ .

**P3.** En este problema estudiaremos los conocidos estadísticos de orden. Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a absolutamente continuas iid cada una con densidad  $f(x)$  y función de distribución  $F(x)$ . Sea  $T_k$  la variable aleatoria que indica el k-ésimo valor más pequeño de las variables aleatorias. (Cuando dos variables distintas toman el mismo valor se ordenan por el índice). Pruebe que

$$f_{T_k}(x) = n \binom{n-1}{k-1} f(x) (F(x))^{k-1} (1 - F(x))^{n-k}$$

**P4.** Sean  $X_1, X_2$  v.a iid exponenciales de parámetro 1.

a) Sea  $X_3 = X_1 + X_2$ . Calcule  $f_{X_3}$ .

b) Sea  $X_3 = \frac{X_2}{X_1}$ . Calcule  $f_{X_3}$ .

**P5.** Sean  $X_1, X_2$  v.a iid normales de media 0 y varianza 1. Sea  $X_3 = \frac{X_2}{X_1}$ . Calcule  $f_{X_3}$ .

**P6.** Suponga que un gusano se encuentra aleatoriamente, con distribución uniforme, en una manzana esférica cuya ecuación en  $\mathbb{R}^3$  está dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ , donde  $a$  es un real. Suponga que usted se come la manzana hasta que queda un cilindro, donde están las pepas, de ecuación  $x^2 + y^2 = a^2$ . Encuentre la probabilidad de que se coma al gusano.

**P7.** Un punto  $(X_1, X_2, X_3)$  se encuentra distribuido uniformemente en la región de  $\mathbb{R}^3$  descrita por  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 3x$ . Encuentre la probabilidad de que  $X_3 \leq 2X_1$ .

**P8.** Sean  $T_1, \dots, T_n$  los estadísticos de orden definidos en el problema 3. Pruebe que la densidad conjunta de estas variables aleatorias está dada por

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} n! f(x_1) f(x_2), \dots, f(x_n), & \text{si } x_1 < x_2 < \dots < x_n \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

**Indicación** Calcule  $\mathbb{P}(T_1 \leq b_1, \dots, T_n \leq b_n, X_1 < X_2 < \dots < X_n)$ .

**P9.** Sean  $X_1, X_2$  y  $X_3$  iid con densidad exponencial de parámetro 1. Calcule  $\mathbb{P}(X_1 \geq 2X_2 \geq 3X_3)$

**P10.** Si  $n$  puntos  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , en una barra de largo  $L$ , se escogen aleatoriamente independientemente y con densidad uniforme, encuentre la probabilidad de que ningún par de puntos tengan una distancia entre ellos menor que  $d$ . Esto es, encuentre  $\mathbb{P}(\min\{|X_i - X_j|, i \neq j\} \geq d)$

**Indicación** Calcule primero  $\mathbb{P}(\min\{|X_i - X_j|, i \neq j\} \geq d, X_1 < X_2 < \dots < X_n)$

**P11.** Sean  $X_1$  y  $X_2$  v.a iid con distribuciones normales de media 0 y varianza 1. Defina, de

manera implícita, las v.a  $R_0$  Y  $\Theta_0$  por las siguientes relaciones:  $X_1 = R_0 \cos \Theta_0$ ,  $X_2 = R_0 \sin \Theta_0$ . Pruebe que  $R_0$  Y  $\Theta_0$  son independientes y encuentre sus densidades.

**P12.** Sean  $X_1$ ,  $X_2$  v.a independientes, absolutamente continuas, con densidades  $f_{X_1}$  y  $f_{X_2}$  respectivamente. Sea  $X_3 = X_1 X_2$ . Pruebe que:

$$f_{X_3}(z) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{1}{w} f_{X_1}\left(\frac{z}{w}\right) f_{X_2}(w) dw, & \text{si } z > 0 \\ 0, & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

**Indicación** Considere las variables aleatorias  $X_3 = X_1 X_2$  Y  $X_4 = X_2$  y aplique el método del jacobiano.

**P13.** Sea  $(X_1, X_2)$  un vector aleatorio con densidad conjunta

$$\begin{cases} 8xy, & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

- Encuentre la esperanza condicional de  $X_2$  dado que  $X_1 = x$  y la esperanza condicional de  $X_1$  dado que  $X_2 = y$
- Encuentre la esperanza condicional de  $X_2^4$  dado que  $X_1 = x$ .
- Encuentre la esperanza condicional de  $X_2$  dado el evento  $A = \{X_1 \leq \frac{1}{2}\}$ .

**P14.** Sea  $X_0$  una v.a no negativa exponencial de parámetro 1. Si  $X_0 = \lambda$  se toman  $n$  observaciones independientes (v.a independientes) con distribuciones exponenciales de parámetro  $\lambda$ .

- Encuentre la densidad condicional de  $X_0$  dado  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .
- Encuentre la esperanza condicional de  $X_0^{-n}$  dado  $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ .

**P15.** Sea  $(X_1, X_2)$  uniformemente distribuido sobre el paralelogramo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(3, 1)$ . Encuentre  $E(X_2 | X_1 = x)$ .

**P16.** Un dado es lanzado independientemente  $n$  veces. Encuentre el promedio de 2's dado que el número de 1's es  $k$ .

**P17.** Sean  $X_1$ ,  $X_2$  v.a iid uniformes en  $[0, 2]$ .

- Encuentre la probabilidad condicional de que  $X_1 \geq 1$  dado que  $X_1 + X_2 \leq 3$ .
- Encuentre la esperanza condicional de  $X_1$  dado que  $X_1 + X_2 \leq 3$ .

**P18.** De las 100 personas que viven en un pueblo, 50 siempre dicen la verdad, 30 siempre mienten y 20 siempre rehusan contestar. Un dado no cargado es lanzado. Si el resultado es 1, 2, 3 o 4 una muestra de 30 personas es extraída con reposición. Si el resultado es 5 o 6 una muestra de 30 personas es extraída sin reposición. Se define la v.a  $X$  de la siguiente manera:  $X = 1$  si el resultado en de la muestra contiene 10 personas de cada categoría,  $X = 2$  si la muestra es tomada con reposición y contiene 12 mentirosos,  $X = 3$  de otra forma. Encuentre  $E(X)$ .

**P19.** Sean  $X_1$  y  $X_2$  v.a iid uniformes en  $[0, 1]$ . Encuentre la esperanza condicional de  $(X_1^2 + X_2^2)^2$  dado  $X_1 - X_2$ .

**P20.** Sean  $X_1$ ,  $X_2$  v.a iid, cada una con densidad

$$\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 1/2, & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Sea  $X_3 = X_1^2 + X_2^2$ . Encuentre  $E(X_3 | X_1 = x)$ .

**P21.** Sea  $X$  uniforme en  $[0, 1]$ . Si  $X = \lambda$ , una moneda con probabilidad de cara igual a  $\lambda$  es lanzada independientemente  $n$  veces. Si  $X_1, \dots, X_n$  son los resultados de los lanzamientos (valen 1 si sale cara, 0 si sale sello), encuentre la densidad condicional de  $X$  dado  $(X_1, \dots, X_n)$ .

**P22.** Sea  $X$  el número de éxitos en  $n$  experimentos de Bernoulli, con probabilidad de éxito  $p$ . Encuentre la esperanza condicional de  $X$  dado que  $X \geq 2$ .

**P23.** Sea  $X_1$  uniforme en  $[0, 10]$  y defina  $X_2$  por

$$\begin{cases} X_1^2, & \text{si } 0 \leq X_1 \leq 6 \\ 3, & \text{si } 6 < X_1 \leq 10 \end{cases}$$

Encuentre la esperanza condicional de  $X_2$  dado que  $2 \leq X_2 \leq 4$ .

**P24.** Considere el siguiente experimento que se realiza en 2 etapas.

(i) Un círculo de radio  $R$  y centro en  $(0, 0)$  es seleccionado, donde  $R$  tiene densidad exponencial de parámetro 1.

(ii) Un punto  $(X_1, X_2)$  es seleccionado, donde  $(X_1, X_2)$  se distribuye uniformemente dentro del círculo construido en (i).

a) Si  $D = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$  es la distancia del punto al origen, encuentre  $E(D)$ .

b) Encuentre la densidad condicional de  $R$  dado  $X_1 = x, X_2 = y$  (Deje la respuesta como una integral, no tiene que calcularla).

**P25.** El siguiente es un ejemplo de un problema de estimación. La entrada  $R$  de un radar es de la forma  $\theta + N$  donde  $\theta$  (la señal) y  $N$  (el ruido) son variables independientes con esperanzas y varianzas finitas. El valor  $R$  es observado, y entonces una estimación de  $\theta$  es hecha, digamos  $\hat{\theta} = d(R)$ , donde  $d$  es una función de los reales en los reales. El propósito es escoger el estimador de modo que  $E((\hat{\theta} - \theta)^2)$  sea lo más pequeña posible. Asuma que  $R$  es absolutamente continua.

a) Pruebe que  $d(x) = E(\theta | R = x)$ .

b) Sea  $\theta = \pm 1$  con igual probabilidad, y  $N$  uniformemente distribuida en  $[-2, 2]$ . Encuentre  $d(x)$  y el valor mínimo de  $E((\hat{\theta} - \theta)^2)$ .

**P26.** Un número  $\theta$  es escogido aleatoriamente con densidad exponencial de parámetro 1. Si  $\theta$  toma un valor  $\lambda$ , una variable  $R$  es observada, donde  $R$  se distribuye como una variable Poisson de parámetro  $\lambda$  (Por ejemplo, puede pensarse  $R$  como el número de partículas radioactivas que pasan a través de un mecanismo de conteo, en cierto intervalo de tiempo, donde el número promedio de estas partículas es seleccionado aleatoriamente). El valor de  $R$  es observado y una estimación de  $\theta$  es realizada, digamos  $\hat{\theta} = d(R)$ . Aplique el problema anterior para encontrar  $d(x)$

**P27.** Sea  $f(x, y) = k(1 + xy(x^2 - y^2))$  la densidad conjunta del vector aleatorio  $(X, Y)$  con soporte en el cuadrado  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

a) Calcule el valor de  $k$ .

b) Calcule la función característica conjunta.

c) Calcule las densidades marginales y las funciones características de  $X$  y de  $Y$ .

d) La función característica de  $X + Y$ . ¿Conclusión?

**P28.** Denotemos por  $V$  el volumen de un sólido tridimensional cualquiera. Sea  $Y$  el número de partículas observadas en  $V$ , y suponga que  $Y$  es una v.a Poisson de parámetro  $\lambda V$ . Las partículas pueden representar polvo en el aire, bacterias en el agua, etc.

a) Si un punto es escogido aleatoriamente dentro de un volumen  $v$ , sea  $R$  la v.a que indica la distancia del punto a la partícula más cercana. Calcule la densidad de  $R$

b) Pruebe que  $U = R^3$  sigue una distribución exponencial.

**P29.** Sea  $(X_1, X_2)$  un vector normal multivariado con vector de media, el vector nulo, y matriz de covarianza

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 \end{pmatrix}$$

En la matriz anterior  $a \in \mathbb{R}$ . Expresar  $(X_1, X_2)$  como producto de una matriz ortonormal y un vector aleatorio  $(Y_1, Y_2)$  donde  $Y_1, Y_2$  son variables normales independientes de media 0.

**P30.** Sea  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un vector normal multivariado  $n$ -dimensional

a) Pruebe que si  $A$  es una matriz de  $m \times n$  entonces  $AX$  es un vector normal multivariado  $m$ -dimensional.

b) Pruebe que si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son reales cualesquiera entonces  $a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$  es una va que sigue una distribución normal.

**P31.** Pruebe que si se tiene que  $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$  es una va con una distribución normal, entonces el vector  $X = (X_1, \dots, X_n)$  sigue una distribución normal multivariada.

**P32.** Sea  $X = (X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$  un vector normal multivariado  $(n+1)$ -dimensional. Pruebe que condicionalmente a  $(X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_{n+1}$  sigue una distribución normal.