

Control 3
14 de Noviembre de 2005

PROFESOR: SERVET MARTÍNEZ

AUXILIARES: BOLÍVAR DÍAZ L., FRANCISCO SILVA A.

P1.- Considere el vector aleatorio (X, T) donde T tiene densidad exponencial de parámetro $\lambda > 0$ y donde X dado T se distribuye según una Poisson de parámetro T , es decir

$$\mathbb{P}(X = n | T = t) = \frac{t^n e^{-t}}{n!} \text{ para } n \geq 0, t > 0.$$

- i) Pruebe que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{n+1}}$ para $n \geq 0$.
- ii) Calcule $\mathbb{E}(X)$.

Indicación: Recuerde que una variable aleatoria Gamma(m, γ) tiene densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\gamma^m x^{m-1} e^{-\gamma x}}{(m-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

P2.- Se lanzan 3 dados de manera independiente, y a continuación se ordenan los resultados obtenidos de menor a mayor y así se obtiene el vector $X = (X_1, X_2, X_3)$, es decir X es el vector de los resultados de los dados ordenados de menor a mayor.

- i) Calcule la distribución de X , es decir debe calcular $\mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3)$, sobre el conjunto $S = \{(k_1, k_2, k_3) \in \{1, \dots, 6\}^3 : k_1 \leq k_2 \leq k_3\}$. Le sugerimos calcular estas probabilidades para los diversos casos que se tienen, esto es:
 - 1) $k_1 = k_2 = k_3$,
 - 2) $k_1 = k_2 < k_3$,
 - 3) $k_1 < k_2 = k_3$,
 - 4) $k_1 < k_2 < k_3$.
- ii) Calcule la distribución marginal de X_2 .

P3.- Se realiza un experimento de Bernoulli repetidas veces con probabilidad de éxito $p \in (0, 1)$, esto es se tiene una secuencia $(X_n : n \geq 1)$ de variables aleatorias independientes con $X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$. Defina la variable aleatoria

$$Z = \inf\{n \geq 2 : X_{n-1} = 0, X_n = 1\},$$

es decir $Z = n$ si la primera vez que se obtiene un fracaso luego de un éxito es en la repetición n . Calcule la función generadora de momentos de Z y la esperanza de Z .

Indicación: Escriba Z como función de dos variables aleatorias independientes H y K , donde H denota la primera repetición en la que ocurre un éxito y K denota la primera repetición después de H donde ocurre un fracaso medida a partir del instante H , esto es: $Z = H + K$ con

$$H = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}, \quad K = \inf\{n > H : X_n = 0\} - H.$$

Cada problema (1., 2. y 3.) tiene el mismo puntaje.

Tiempo: 3 horas.