



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Escuela de Ingeniería y Ciencias  
Departamento de Ingeniería Civil Eléctrica  
MA33A

# Auxiliar

Jueves 26 de octubre

Andrés Hurtado del Nido

## Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, emplearemos el uso de 2 herramientas matemáticas que nos van a facilitar los cálculos: las matrices y los determinantes.

Cuando Estudiamos un S.E.L. debemos preguntarnos:  
 ¿Tiene solución el sistema?, es decir: ¿Es compatible?  
 Si existe dicha solución ¿Cuántas y cuáles son?

Muchos problemas de la vida real nos obligan a resolver simultáneamente varias ecuaciones lineales para hallar las soluciones conectadas a todas ellas. También resultan muy útiles en geometría, dado que se pueden interpretar como rectas, planos e hiperplanos, por lo que resolver un sistema equivale a estudiar la posición relativa de estas figuras geométricas en el plano o en el espacio.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que podemos escribir de forma tradicional así:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 a_{1,1} & x_1 & + & a_{1,2} & x_2 & + & a_{1,3} & x_3 & + & \dots & + & a_{1,n} & x_n & = & b_1 \\
 a_{2,1} & x_1 & + & a_{2,2} & x_2 & + & a_{2,3} & x_3 & + & \dots & + & a_{2,n} & x_n & = & b_2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{m,1} & x_1 & + & a_{m,2} & x_2 & + & a_{m,3} & x_3 & + & \dots & + & a_{m,n} & x_n & = & b_m
 \end{array}$$

Un sistema así expresado tiene “m” ecuaciones y “n” incógnitas, donde  $a_{i,j}$  son números reales, llamados **coeficientes del sistema**. Los valores  $b_m$  son números reales, llamados **términos independientes** del sistema, las incógnitas  $x_j$  son las **variables del sistema**.

Este mismo sistema de ecuaciones lineales en notación matricial tiene esta forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\
 \text{A} & & \text{X} & & \text{b}
 \end{array}$$

Donde:

A: Matriz de Coeficientes.

X: Vector de incógnitas.

B: Vector de términos independientes.

Denotaremos “Matriz Ampliada de dimensión  $m \times (n+1)$  a la matriz que se obtiene al añadir a la matriz de coeficientes la columna de los términos independientes, y la denotamos por  $A^*$ , es decir:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right]$$

### Clasificación

Existen 2 tipos:

#### Dependiendo de sus soluciones

El sistema se podrá clasificar como:

$$\text{S.E.L.} \left\{ \begin{array}{ll} \rightarrow \text{COMPATIBLE (con solución)} & \rightarrow \text{DETERMINADO (una solución)} \\ & \searrow \text{INDETERMINADO (infinitas soluciones)} \\ \rightarrow \text{INCOMPATIBLE (sin solución)} \end{array} \right.$$

#### Dependiendo de sus términos independientes

El sistema se podrá clasificar como:

$$\text{S.E.L.} \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{HOMOGÉNEOS (todos los terminos independientes son nulos)} \\ \rightarrow \text{NO HOMOGÉNEOS (no todos los terminos independientes son nulos)} \end{array} \right.$$

Como los sistemas homogéneos son aquellos que tienen todos sus términos independientes nulos, se puede observar que siempre son compatibles, ya que tienen al menos la solución  $(0,0,0,\dots,0)$ , que se denomina **solución trivial**, puesto que, en la práctica, esta solución carece de interés, suele decirse que un sistema homogéneo posee solución sólo si ésta es distinta de la trivial.

Además, si un sistema homogéneo presenta una solución distinta de la trivial:  $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$ , entonces se cumple que son también solución todas las proporcionales a ella, esto es,  $(KS_1, KS_2, KS_3, \dots, KS_n)$ , para todo  $K$  real. Donde  $K=0 \Rightarrow$  la solución trivial.

Para resolver un S.E.L., es decir, hallar todas sus soluciones, hay que hacer transformaciones en las ecuaciones hasta que las incógnitas queden despejadas.

Estas transformaciones convierten nuestro sistema inicial en otro sistema (con aspecto distinto pero más fácil de resolver), que tiene las mismas soluciones (ie, sistemas equivalentes).

Las transformaciones que mantiene la equivalencia entre sistemas son:

- Intercambiar ecuaciones entre sí.
- Suprimir una ecuación con todos sus elementos nulos.
- Suprimir una ecuación que sea proporcional a otra.
- Suprimir una ecuación que sea combinación lineal de otras.
- Multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de cero.
- Sustituir una ecuación  $i$  del siguiente modo:

$$E_i = E_i + aE_j$$

Es decir, sumar y restar las ecuaciones de manera ponderada entre sí.

Algunos métodos de resolución son:

### **Métodos directos**

- Método de Gauss (por reducción)
- Método de Cramer (por determinantes)
- Por inversión de la matriz
- Método de Gauss-Jordan (por eliminación)
- Por sustitución

### **Métodos iterativos**

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel

El principal método numérico para la resolución de dichos S.E.L. es el método de Gauss, junto con el método de Gauss-Jordan, un complemento al primero.

### Método de Gauss (por reducción)

Dado un sistema de "m" ecuaciones con "n" incógnitas se trata de obtener un sistema equivalente cuya 1ª ecuación tenga n incógnitas, la segunda n-1, la tercera n-2, y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación, que tendrá una sola incógnita. Hecho esto, resolvemos la última ecuación, a continuación la penúltima, y así hasta llegar a la primera. Es decir, el método de Gauss consiste en triangular la matriz de coeficientes.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema compatible determinado:

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 24 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ -y-2z=-9 \\ 5z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5z=10 \\ -y-4=-9 \\ x+5+2=11 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=2} \mid \boxed{y=5} \mid \boxed{x=4}$$

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema compatible indeterminado:

$$\begin{cases} 2x-4y+6z=2 \\ y+2z=-3 \\ x-3y+z=4 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ y+2z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+3z=1 \\ y=-3-2z \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=\lambda} \mid \boxed{y=-3-2\lambda} \mid \boxed{x=-7\lambda-5}$$

### Método de Gauss-Jordan

Es una variante del método de Gauss, y resulta ser más simple al final del proceso, ya que no es preciso despejar las variables pues la solución se obtiene directamente.

Se basa en diagonalizar la matriz de coeficientes.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 24 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & -3 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}
 \end{aligned}$$