

# Auxiliar Extra

Martes 26 de septiembre

Andrés Hurtado del Nido

## Integración por Cuadratura de Gauss

La integral se define como:

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

La fórmula de integración numérica esta dada por:

$$I_n(f) = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

Donde los coeficientes  $c_i$  y los nodos  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Son tales que la fórmula es exacta para  $f \in P_{2n-1}$ , es decir:

$$I(f) = I_n(f) \quad \forall f \in P_{2n-1}$$

Si  $n = 2$  se pueden encontrar los coeficientes y nodos que satisfacen este requisito, resolviendo el sistema no lineal que resulta de imponer la condición de exactitud sobre los polinomios de la base canónica de  $P_3(P_{2,2-1})$ :  $f(x) = 1$ ,  $f(x) = x$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = x^3$

$$c_1 + c_2 = 2 \quad \left( = \int_{-1}^1 1 \cdot dx \right)$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \quad \left( = \int_{-1}^1 x \cdot dx \right)$$

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \quad \left( = \int_{-1}^1 x^2 \cdot dx \right)$$

$$c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0 \quad \left( = \int_{-1}^1 x^3 \cdot dx \right)$$

La solución del sistema es:

$$c_1 = c_2 = 1 \quad x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Y en consecuencia la formula de cuadratura de Gauss para  $n = 2$  es:

$$I_2(f) = 1 \cdot f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + 1 \cdot f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

Es poco práctico repetir este esquema para obtener las fórmulas de cuadratura para otros valores mayores de  $n$ , pues habría que resolver sistemas no lineales de complejidad creciente y de los cuales no se tienen garantías de existencia ni unicidad de soluciones.

## Problema

### Control 2, 2004

Calcule  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$  con la cuadratura de Gauss donde:

$$a_1 = a_3 = 0, \bar{5}$$

$$a_2 = 0, \bar{8}$$

$$x_1 = -x_3 = -0,774597$$

$$x_2 = 0$$

Primero se deberá normalizar el problema, llevando la integral original a los límites de integración del método de la cuadratura de Gauss, luego el cambio de variable utilizado es una función lineal, para el siguiente caso genérico:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Y la función lineal es:

$$x = \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2} y$$

Donde además:

$$dx = \frac{(b-a)}{2} dy$$

Utilizando lo anterior, para este caso se tendrá:

$$x = \frac{(2+1)}{2} + \frac{(2-1)}{2} y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} y$$

$$dx = \frac{1}{2} dy$$

Luego, la integral a utilizar será:

$$\int_a^b \frac{1}{2} \frac{dy}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} y} = \int_a^b \frac{1}{3+y} dy$$

Por lo tanto:

$$I_3(f) = 0, \bar{5} \cdot \left( \frac{1}{3-0,774597} + \frac{1}{3+0,774597} \right) + 0, \bar{8} \cdot \frac{1}{3}$$

$$I_3(f) = 0,249642 + 0,147182 + 0,296296$$

$$\Rightarrow I_3(f) = 0,693120$$

Cuando:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,693147$$