

El cálculo de la Spline S que interpola a $f(x)$ en la malla $\{x_j\}_{j=0}^n$ se realiza escribiendo:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \quad j=0, \dots, n-1$$

con lo que $a_j = f(x_j) \quad j=0, \dots, n-1$

$$1. \quad a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \quad j=0, \dots, n-1$$

$$2. \quad b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \quad j=0, \dots, n-2$$

$$3. \quad c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \quad j=0, \dots, n-2$$

donde $h_j = x_{j+1} - x_j$, lo que lleva al sistema lineal:

$$h_{j-1} c_{j-1} + 2(h_j + h_{j-1}) c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j} (a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}} (a_j - a_{j-1})$$

Con el sistema lineal anterior, y además suponiendo que $c_0 = d_0 = c_{(n-1)} = d_{(n-1)} = 0$, se pueden obtener los valores $\{c_j\}_{j=0}^{n-1}$ en función de los valores conocidos $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ y

$$\{a_j\}_{j=0}^n.$$

Con esto, el algoritmo para encontrar la función Spline, dado que ya conocemos los

$\{c_j\}_{j=0}^{n-1}$, es el siguiente:

1. usando la ecuación 3. se despejan los valores d_j :

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \quad j=0, \dots, n-2$$

y el valor de d_{n-1} es el que se había impuesto antes: $d_{n-1} = 0$

2. con esto, usando la ecuación 2. se despejan los valores b_j :

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - c_j h_j - d_j h_j^2 = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{2c_j + c_{j+1}}{3} h_j \quad j=0, \dots, n-2$$

y el b_{n-1} se deduce de la ecuación 2.:

$$b_{n-1} = b_{n-2} + 2c_{n-2} h_{n-2} + 3d_{n-2} h_{n-2}^2$$

Así, se conocen todos los valores $\{a_j\}_{j=0}^n$, $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$, $\{c_j\}_{j=0}^{n-1}$ y $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ para

formar la Spline que interpola $f(x)$ en la malla $\{x_j\}_{j=0}^n$:

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n-1} S_j(x) I_j(x) \quad \text{donde} \quad I_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$