



Profesor: Gonzalo Hernández.  
Auxiliar: Gonzalo Ríos.  
Fecha: 06 de Octubre

# Auxiliar 8: Sistemas de Ecuaciones No Lineales

## Resumen Materia

### Métodos Numéricos en $\mathbb{R}$

- Punto fijo:** Diremos que una función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un punto fijo en  $x_0$  ssi:  $g(x_0) = x_0$ .
- Ceros de una función:** Diremos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un cero en  $x_0$  ssi:  $f(x_0) = 0$ .
- Relación entre punto fijo y ceros:** Dado alguno de los dos problemas, se puede transformar en el otro tipo de problema:
  - Si  $x_0$  es un punto fijo de  $g(x)$ , entonces  $x_0$  es un cero de la función definida como  $f(x) = x - g(x)$ .
  - Si  $x_0$  es un cero de  $f(x)$ , entonces  $x_0$  es un punto fijo de la función definida como  $g(x) = x - f(x)$ .
- Teorema de punto fijo:** Sea  $g(x)$  una función continua en  $[a, b]$ .
  - Si  $a \leq g(x) \leq b \implies g(x)$  tiene un punto fijo  $p \in [a, b]$ .
  - Si  $g(x)$  es derivable en  $(a, b)$  y  $\left| \frac{dg(x)}{dx} \right| \leq 1$  para  $x \in (a, b) \implies$  el punto fijo es único.
- Método de punto fijo:** Si se cumplen las condiciones de existencia y unicidad del punto fijo:
  - Partir con un  $x_0 \in [a, b]$
  - La sucesión definida como  $x_{k+1} = g(x_k)$  converge al punto fijo único de  $g(x)$ .
- Método de la Bisección:** Si  $f(x)$  tiene una sola raíz  $\bar{x} \in [a, b]$ , entonces:
  - Sean  $\alpha_0, \beta_0 \in [a, b]$  tal que  $f(\alpha_0)$  y  $f(\beta_0)$  tengan distinto signo, es decir:  $f(\alpha_0)f(\beta_0) < 0$ . Sea  $\varepsilon$  la precisión buscada.
  - Se define  $\varepsilon_k = \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}$ .
  - Si  $|f(\varepsilon_k)| \leq \varepsilon$ , terminar y  $\bar{x} \simeq \varepsilon_k$ .
  - Si  $f(\varepsilon_k)f(\alpha_k) < 0$ , entonces  $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ ,  $\beta_{k+1} = \varepsilon_k$ .
  - En caso contrario, si  $f(\varepsilon_k)f(\beta_k) < 0$ , entonces  $\alpha_{k+1} = \varepsilon_k$ ,  $\beta_{k+1} = \beta_k$ .
  - Volver a (b).
  - El número de iteraciones será cercano a  $n = \log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$
- Método de la Secante:** Si  $f(x)$  tiene una sola raíz  $\bar{x} \in [a, b]$ , entonces:
  - Sean  $x_0, x_1$  dos aproximaciones iniciales de  $\bar{x}$ .
  - La recta que interpola a  $f(x)$  en  $x_k, x_{k-1}$  es:  $L_n(x) = f(x_k) + (x - x_k) \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$
  - Se define  $x_{k+1}$  la nueva aproximación de  $\bar{x}$  que cumple  $L_n(x_{k+1}) = 0$ .
  - Despejando se obtiene la sucesión:  $x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$
- Método de Newton - Raphson:** Dada una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  regular, por Taylor se obtiene que  $f(\bar{x}) = f(x) + f'(x)(\bar{x} - x) + \frac{f''(\xi(x))}{2}(\bar{x} - x)^2$ . Si  $\bar{x}$  es un cero de  $f(x)$ , entonces si  $|\bar{x} - x| \approx 0 \implies \bar{x} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ 
  - Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$  cercano a  $\bar{x}$ .
  - $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

9. **Convergencia del Método de Newton:** Sea  $f(x) \in \zeta^2[a, b]$ . Sea  $\bar{x}$  tal que  $f(\bar{x}) = 0, f'(\bar{x}) \neq 0$ . Entonces existe  $\delta > 0$  tal que el método de newton genera una sucesión  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  que converge a  $\bar{x}$  para cualquier  $x_0 \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$
10. **Orden de convergencia:** Sea  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  una sucesión que converge a  $\bar{x}$ , construida por un método iterativo. Sea  $e_n = \bar{x} - x_n$  el error cometido por la n-ésima iteración. Se dirá que el método es de orden  $p$  si existe una constante  $c$  tal que:  $|e_{n+1}| \leq c |e_n|^p$
- (a) **Bisección:**  $e_{n+1} = \frac{1}{2}(e_n + e_{n-1}) \implies p = 1$
- (b) **Secante:**  $e_{n+1} = -e_n e_{n-1} \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\eta_n)}$ , con  $\xi_n \in \overline{CO}(\bar{x}, x_n, x_{n-1}), \eta_n \in \overline{CO}(x_n, x_{n-1}) \implies p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- (c) **Newton:**  $e_{n+1} = -e_n^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}$ , con  $\xi_n \in \overline{CO}(\bar{x}, x_n) \implies p = 2$

## Métodos Numéricos en $\mathbb{R}^n$

1. **Campo Vectorial:**  $\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{F}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$ , donde  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es un campo escalar,  $i = 1 \dots n$ .
2. **Punto Fijo:**  $\vec{F}(x)$  tiene un punto fijo  $\bar{x}$  en  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  si  $\vec{F}(\bar{x}) = \bar{x}$
3. **Teorema de punto fijo:** Sea  $\vec{F}(x)$  un campo vectorial continuo en  $D$
- (a) Si  $\vec{F}(x) \in D \forall x \in D \implies \vec{F}(x)$  tiene un punto fijo en  $D$ .
- (b) Si  $\vec{F}(x)$  es derivable con continuidad en  $D$  y  $\left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n} \forall x \in D, \forall i, j = 1 \dots n$  con  $K < 1 \implies$  el punto fijo es único
4. **Método de punto fijo:** Si se cumplen las condiciones de existencia y unicidad del punto fijo:
- (a) Partir con un  $x_0 \in D$
- (b) La sucesión definida como  $x_{k+1} = \vec{F}(x_k)$  converge al punto fijo único de  $\vec{F}(x)$ .
5. **Ceros de un campo vectorial:** Diremos que n campo vectorial  $\vec{F}(x)$  tiene un cero en  $x_0$  ssi:  $\vec{F}(x_0) = \vec{0}$ .
6. **Método de Newton – Kantorovich:** Dado un campo vectorial  $\vec{F}(x)$  regular, el Teorema de Taylor en  $\mathbb{R}^n$  nos asegura que  $\vec{F}(\bar{x}) = \vec{F}(x) + \nabla \vec{F}(x)(\bar{x} - x) + O(\|\bar{x} - x\|^2)$ . Si  $\|\bar{x} - x\| \approx 0 \implies \bar{x} = x - \left[ \nabla \vec{F}(x) \right]^{-1} \vec{F}(x)$ .
- (a)  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  cercano a  $\bar{x}$
- (b)  $x_{k+1} = x_k - \left[ \nabla \vec{F}(x_k) \right]^{-1} \vec{F}(x_k)$

## Problemas

1. Usando una aritmetica de 4 cifras significativas con redondeo, aplique el método de newton - raphson para resolver la siguiente ecuación:  $f(x) = x$ , donde  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin(\pi x) - \frac{1}{2}\cos(\pi x^2)$ . Tome  $x_0 = \frac{3}{4}$
2. Demuestre que el orden de convergencia del método de la secante es  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .
3. Usando una aritmetica de 4 cifras significativas con redondeo, aplique el método de newton - kantorovich para encontrar ceros del siguiente campo vectorial:  $F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 5x_1^2 - x_2^2 \\ x_2 - \frac{1}{4}(\sin x_1 - \cos x_2) \end{bmatrix}$ . Tome  $x_0 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$

## Respuestas

1.  $x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ . Usando una aritmetica de 4 cifras significativas con redondeo.

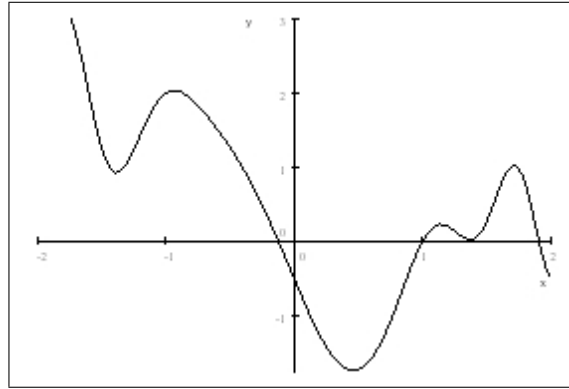
(a) Se define  $g(x) = f(x) - x \implies g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin(\pi x) - \frac{1}{2}\cos(\pi x^2) - x$

(b) Se calcula  $g'(x) = x - \pi \cos(\pi x) + \pi x \sin(\pi x^2) - 1$

(c)  $x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{1}{2}x_k^2 - \sin(\pi x_k) - \frac{1}{2}\cos(\pi x_k^2) - x_k}{x_k - \pi \cos(\pi x_k) + \pi x_k \sin(\pi x_k^2) - 1}$

$k$	$x_k$	$x_k^2$	$\sin(\pi x_k)$	$\cos(\pi x_k)$	$x_k \sin(\pi x_k^2)$
(d) 0	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16} = 0.5625$	$\sin(\pi \frac{3}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\cos(\pi \frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{3}{4} \sin(\pi \frac{9}{16}) = 0.7356$
1	$\frac{3}{4} + 0.2518 = 1.002$	$1.002^2 = 1.004$	$\sin(1.002\pi) = -0.006283$	$\cos(1.002\pi) = -1$	$1.002 \sin(\pi 1.002^2) = -0.006283$
2	$1.002 - 0.002012 = 1$	1	0	-1	0

(e) La solución es  $\bar{x} = 1$



2.  $x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$ ,  $e_n = \bar{x} - x_n$ ,  $|e_{n+1}| \leq c |e_n|^p$ ,  $e_{n+1} = -e_n e_{n-1} \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\eta_n)}$

(a) Busquemos  $e_{n+1}$  en función de  $e_n$  y  $e_{n-1}$ .

(b)  $f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(\eta)(x_n - x_{n-1}) \implies f'(\eta) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ ,  $\eta \in \overline{CO}(x_{n-1}, x_n)$

(c) Error de Lagrange:  $f(x) - L_n(x) = (x - x_n)(x - x_{n-1}) \frac{f''(\xi)}{2}$ , con  $L_n(x) = f(x_n) + (x - x_n) \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

(d)  $f(\bar{x}) = 0 \implies L_n(\bar{x}) = -(\bar{x} - x_n)(\bar{x} - x_{n-1}) \frac{f''(\xi)}{2}$ ,  $\xi \in \overline{CO}(x_{n-1}, x_n, \bar{x})$

(e) Por contrucción del método,  $L_n(x_{n+1}) = 0 \implies f(x_n) = -(x_{n+1} - x_n)f'(\eta)$

(f) Luego  $L_n(x) = -(x_{n+1} - x_n)f'(\eta) + (x - x_n)f'(\eta) = (x - x_{n+1})f'(\eta)$

(g) Entonces  $L_n(\bar{x}) = (\bar{x} - x_{n+1})f'(\eta) = e_{n+1}f'(\eta)$  y  $L_n(\bar{x}) = -e_n e_{n-1} \frac{f''(\xi)}{2}$

(h) Finalmente,  $e_{n+1} = -e_n e_{n-1} \frac{f''(\xi)}{2f'(\eta)}$ ,  $\xi \in \overline{CO}(x_{n-1}, x_n, \bar{x})$ ,  $\eta \in \overline{CO}(x_{n-1}, x_n)$

(i) Ahora,  $|e_{n+1}| \leq |e_n| |e_{n-1}| M \iff M |e_{n+1}| \leq M |e_n| M |e_{n-1}|$

(j) Sea  $\delta = \max\{M |e_0|, M |e_1|\} < 1$ . Entonces  $M |e_2| \leq \delta \delta = \delta^2 < \delta$ .

(k)  $M |e_3| \leq \delta^2 \delta = \delta^3$ ,  $M |e_4| \leq \delta^3 \delta^2 = \delta^5$ .

(l) Si definimos  $q_n \in \mathbb{N}$  de modo que  $M |e_n| \leq \delta^{q_n}$ , entonces tenemos la ecuación  $M |e_{n+1}| \leq \delta^{q_n} \delta^{q_{n-1}} = \delta^{q_{n+1}}$

(m) La ecuación recursiva queda  $q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$ , con  $q_0 = 1, q_1 = 1$

(n) Suponiendo  $q_n = \lambda^n$ , entonces  $\lambda^n + \lambda^{n-1} = \lambda^{n+1} \implies \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

(o) Las soluciones son  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \implies q_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

(p)  $M |e_{n+1}| \leq \delta^{q_{n+1}} = \delta^{c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}$ , pero como  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0.618$ , entonces  $\delta^{c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}$  se puede acotar por una constante

(q) Se define  $B_n = k \delta^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}$ .  $B_n$  tiene orden de convergencia  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , ya que  $B_{n+1} = k \delta^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}} = k \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) B_n^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = c B_n^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$ . Luego, como  $e_n \leq B_n$ , entonces  $e_n$  tiene un orden de convergencia menor o igual a  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

3.  $F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 5x_1^2 - x_2^2 \\ x_2 - \frac{1}{4}(\sin x_1 - \cos x_2) \end{bmatrix} \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$ . Primero encontremos la formula explicita

(a) Calculamos  $\nabla F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x_1 & -2x_2 \\ -\frac{1}{4}\cos x_1 & 1 - \frac{1}{4}\sin x_2 \end{bmatrix}$

(b) Invertimos  $\nabla F(x_1, x_2) : \begin{bmatrix} \frac{1}{10x_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10x_1 & -2x_2 \\ -\frac{1}{4}\cos x_1 & 1 - \frac{1}{4}\sin x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5x_1}x_2 \\ -\frac{1}{4}\cos x_1 & -\frac{1}{4}\sin x_2 + 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4}\cos x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5x_1}x_2 \\ -\frac{1}{4}\cos x_1 & -\frac{1}{4}\sin x_2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5x_1}x_2 \\ 0 & -\frac{1}{4}\sin x_2 - \frac{1}{20x_1}x_2 \cos x_1 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\sin x_2 - \frac{1}{20x_1}x_2 \cos x_1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5x_1}x_2 \\ 0 & -\frac{1}{4}\sin x_2 - \frac{1}{20x_1}x_2 \cos x_1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5x_1}x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5x_1}x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5x_1}x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [\nabla F(x_1, x_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5x_1}x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\sin x_2 - \frac{1}{20x_1}x_2 \cos x_1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4}\cos x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10x_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [\nabla F(x_1, x_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sin x_2 - 4}{-40x_1 + 2x_2 \cos x_1 + 10x_1 \sin x_2} & -4 \frac{x_2}{-20x_1 + x_2 \cos x_1 + 5x_1 \sin x_2} \\ -\frac{1}{-40x_1 + 2x_2 \cos x_1 + 10x_1 \sin x_2} & -20 \frac{x_1}{-20x_1 + x_2 \cos x_1 + 5x_1 \sin x_2} \end{bmatrix}$$

(c)  $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - [\nabla F(x_1, x_2)]^{-1} F(x_1, x_2)$

$$\Rightarrow \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \begin{bmatrix} \frac{\sin x_2 - 4}{-40x_1 + 2x_2 \cos x_1 + 10x_1 \sin x_2} (5x_1^2 - x_2^2) - 4 \frac{x_2}{-20x_1 + x_2 \cos x_1 + 5x_1 \sin x_2} (x_2 + \frac{1}{4}\cos x_2 - \frac{1}{4}\sin x_1) \\ -\frac{1}{-40x_1 + 2x_2 \cos x_1 + 10x_1 \sin x_2} (5x_1^2 - x_2^2) - 20 \frac{x_1}{-20x_1 + x_2 \cos x_1 + 5x_1 \sin x_2} (x_2 + \frac{1}{4}\cos x_2 - \frac{1}{4}\sin x_1) \end{bmatrix}$$

(d) Como se puede ver, es extremadamente complicada la formula, entonces lo hacemos numericamente

i.  $x_0 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}, F(x_0) = \begin{bmatrix} 5(0.25)^2 - (0.25)^2 \\ 0.25 - \frac{1}{4}(\sin 0.25 - \cos 0.25) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.4304 \end{bmatrix} \nabla F(x_0) = \begin{bmatrix} 10(0.25) & -2(0.25) \\ -\frac{1}{4}\cos 0.25 & 1 - \frac{1}{4}\sin 0.25 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 \\ -0.2422 & 0.9381 \end{bmatrix}$$

$$[\nabla F(x_0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4218 & 0.2248 \\ 0.1089 & 1.124 \end{bmatrix}$$

ii.  $x_1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4218 & 0.2248 \\ 0.1089 & 1.124 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.4304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0478 \\ -0.261 \end{bmatrix}$

$$F(x_1) = \begin{bmatrix} 5(0.0478)^2 - (-0.261)^2 \\ -0.261 - \frac{1}{4}(\sin 0.0478 - \cos -0.261) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0567 \\ -0.03141 \end{bmatrix}$$

$$\nabla F(x_1) = \begin{bmatrix} 10(0.0478) & -2(-0.03141) \\ -\frac{1}{4}\cos(0.0478) & 1 - \frac{1}{4}\sin -0.03141 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.478 & 0.06282 \\ -0.2497 & 1.008 \end{bmatrix}$$

$$[\nabla F(x_1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 2.026 & -0.1263 \\ 0.5019 & 0.9608 \end{bmatrix}$$

iii.  $x_2 = \begin{bmatrix} 0.0478 \\ -0.261 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.026 & -0.1263 \\ 0.5019 & 0.9608 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0567 \\ -0.03141 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1587 \\ -0.2024 \end{bmatrix}$

$$F(x_2) = \begin{bmatrix} 5(0.1587)^2 - (-0.2024)^2 \\ -0.2024 - \frac{1}{4}(\sin 0.1587 - \cos -0.2024) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.08496 \\ 0.002988 \end{bmatrix}$$

$$\nabla F(x_2) = \begin{bmatrix} 10(0.1587) & -2(-0.2024) \\ -\frac{1}{4}\cos 0.1587 & 1 - \frac{1}{4}\sin -0.2024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.587 & 0.4048 \\ -0.2469 & 1.050 \end{bmatrix}$$

$$[\nabla F(x_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5945 & -0.2292 \\ 0.1398 & 0.8985 \end{bmatrix}$$

iv.  $x_3 = \begin{bmatrix} 0.1587 \\ -0.2024 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5945 & -0.2292 \\ 0.1398 & 0.8985 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.08496 \\ 0.002988 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1089 \\ -0.217 \end{bmatrix}$

$$F(x_3) = \begin{bmatrix} 5(0.1089)^2 - (-0.217)^2 \\ -0.217 - \frac{1}{4}(\sin 0.1089 - \cos -0.217) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01221 \\ -0.00003428 \end{bmatrix}$$

$$\nabla F(x_3) = \begin{bmatrix} 10(0.1089) & -2(-0.217) \\ -\frac{1}{4}\cos 0.1089 & 1 - \frac{1}{4}\sin -0.217 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.089 & 0.434 \\ -0.2485 & 1.054 \end{bmatrix}$$

$$[\nabla F(x_3)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8394 & -0.3456 \\ 0.1979 & 0.8673 \end{bmatrix}$$

v.  $x_4 = \begin{bmatrix} 0.1089 \\ -0.217 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8394 & -0.3456 \\ 0.1979 & 0.8673 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01221 \\ -0.00003428 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.09864 \\ -0.2194 \end{bmatrix}$

$$F(x_4) = \begin{bmatrix} 5(0.09864)^2 - (-0.2194)^2 \\ -0.2194 - \frac{1}{4}(\sin 0.09864 - \cos -0.2194) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0005129 \\ -0.00001298 \end{bmatrix}$$