Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre Otoño 2006
Cálculo Numérico
MA33A-01

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos.
Fecha: 30 de Agosto

Auxiliar 4: Métodos Iterativos

Resumen Materia

1. **Método Iterativo:**
   (a) La idea es empezar con una aproximación inicial $\vec{x}^{(0)}$ a la solución $\vec{x}$ del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, y generar una sucesión de vectores $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ que converge a $\vec{x}$.
   (b) La forma de los elementos de la sucesión es $\vec{x}^{(k+1)} = f(\vec{x}^{(k)})$
   (c) Los métodos más utilizados son del tipo $f(\vec{x}^{(k)}) = B\vec{x}^{(k)} + \vec{h}$ donde $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$

2. **Construyendo un Método Iterativo:**
   (a) Sean M y $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que: M es invertible y $A = M - N$
   (b) $Ax = b \Longleftrightarrow Mx = Nx + b \Longleftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$
   (c) $B = M^{-1}N$ y $h = M^{-1}b$
   (d) Se puede descomponer A como $A = diag(A) + low(A) + up(A)$ donde
      i. $diag(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$ matriz diagonal
      ii. $low(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \quad i > j \\ 0 & si \quad i \leq j \end{cases}$ matriz triangular inferior
      iii. $up(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \quad i < j \\ 0 & si \quad i \geq j \end{cases}$ matriz triangular superior

3. **Método de Jacobi:**
   (a) se define M y N
      i. $M = diag(A)$
      ii. $N = -[low(A) + up(A)]$
      iii. $B = -diag(A)^{-1}[low(A) + up(A)]$
      iv. $h = diag(A)^{-1}b$
   (b) El vector de la iteración k del método de Jacobi satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$x_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right)}{a_{ii}} \quad 1 \leq i \leq n,\ k = 1, 2, 3...$$

4. **Método de Gauss - Seidel:**
   (a) se define M y N
      i. $M = [diag(A) + low(A)]$
      ii. $N = -up(A)$
      iii. $B = -\left[diag(A) + low(A)\right]^{-1}\left[up(A)\right]$
      iv. $h = \left[diag(A) + low(A)\right]^{-1} b$
   (b) El vector de la iteración k del método de Gauss-Seidel satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$x_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right)}{a_{ii}} \quad 1 \leq i \leq n,\ k = 1, 2, 3...$$

5. **Método Sor:**

(a) Es una modificación al método de Gauss-Seidel, ya que se construye:

i. $M = [diag(A) + low(A)]$

ii. $N = -up(A)$

iii. $B = -[diag(A) + low(A)]^{-1}[up(A)]$

iv. $h = [diag(A) + low(A)]^{-1} b$

(b) Pero, $\vec{x}^{(k)} = (1-w)\vec{x}^{(k-1)} + w(B\vec{x}^{(k-1)} + \vec{h}),$ con $w \geq 1$

(c) El vector de la iteración k del método de Sor satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$x_i^{(k)} = (1-w)x_i^{(k-1)} + w\frac{\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} \quad - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right)}{a_{ii}} \quad 1 \leq i \leq n,\ k = 1, 2, 3...$$

(d) Para matrices tridiagonales y simétricas, el valor óptimo de w, que aumenta la rapidez de convergencia es: $\bar{w} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(B)}}$, donde $\rho(B)$ es el radio espectral de la matriz B.

6. **Análisis de Error de los Métodos Iterativos:** Si $x^{(k)}$ es la iteración k de J o G-S y $Ax = b$:
$\frac{\|x-x^{(k)}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|b-Ax^{(k)}\|}{\|b\|}$

7. **Polinomio característico de A:** $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$

8. **Valores propios de A:** Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces las n raices de $p(\lambda)$ son los valores propios de A.

9. **Vectores propios de A:** Si λ es un valor propio de A, y $\vec{x} \neq \vec{0}$ cumple la propierdad que $(A - \lambda I)\,\vec{x} = 0$, entonces $\vec{x}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ.

10. **Radio espectral de A:**

(a) $\rho(A) = \max\limits_{i=1...n} |\lambda_i|$ donde λ_i es un valor propio de A

(b) Proposiciones:

i. $||A||_2 = \rho(A^tA)^{\frac{1}{2}}$

ii. $\rho(A) \leq ||A||$

11. **Matriz convergente:**

(a) Una matriz A es convergente si: $\lim\limits_{k\to\infty}(A^k)_{ij} = 0\ \forall i, j = 1, ..., n$

(b) Las siguientes proposiciones son equivalente:

i. A es una matriz convergente

ii. $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} ||A^k|| = 0$

iii. $\rho(A) < 1$

iv. $\lim\limits_{k\to\infty} A^k x = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

12. **Relación entre métodos iterativos y valores propios:** si x^k es la iteración k de $x^{k+1} = Bx^k + h$ y $Ax = b$ entonces
Para $k \to \infty$, $\left\|x^k - x\right\| \approx \rho(B)^k \left\|x^0 - x\right\|$
Obs: Si los métodos anteriores convergen , entonces se cumple que $0 \leq \rho(B_{GS}) < \rho(B_J) < 1$

13. **Método de la potencia:** Sea la matriz A con los valores propios $\lambda_1, ..., \lambda_n$ y los vectores propios $\vec{v}^{(1)}, ..., \vec{v}^{(n)}$. Supongamos que $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ $j = 2, 3, ..., n$. Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces existen $\beta_1, ..., \beta_n$ tal que $\vec{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \vec{v}^{(j)}$. Si multiplicamos por A, obtenemos $A\vec{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j A\vec{v}^{(j)} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j \vec{v}^{(j)}$. Si repetimos k veces obtenemos $A^k\vec{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^k \vec{v}^{(j)}$. Si factorizamos por λ_1 obtenemos $A^k\vec{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \vec{v}^{(j)}$. Como $|\lambda_1| > |\lambda_j|$, $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k = 0$ $\forall j = 2, ..., n$ lo que implica que $\lim_{k\to\infty} A^k\vec{x} = \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k \beta_1 \vec{v}^1$. El problema de esto es que si $|\lambda_1| < 1$ converge a cero, y si $|\lambda_1| > 1$ diverge. Para evitar esto, se utiliza un proceso de escalamiento.

14. **Escalamiento en el método de la potencia:**

(a) Primero se selecciona $\vec{x}$ como un vector unitario $\vec{x}^{(0)}$ en relación con $\|\cdot\|_\infty$, y una componente $x_{p_0}^{(0)}$ tal que $\left|x_{p_0}^{(0)}\right| = 1 = \left\|\vec{x}^{(0)}\right\|_\infty$, de modo que $\beta_1 \neq 0$.

(b) Se define $\vec{y}^{(1)} = A\vec{x}^{(0)}$ y $\mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)} = \frac{y_{p_0}^{(1)}}{x_{p_0}^{(0)}} = \frac{\beta_1\lambda_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \lambda_j v_{p_0}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j v_{p_0}^{(j)}} = \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \frac{\lambda_j}{\lambda_1} v_{p_0}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j v_{p_0}^{(j)}}\right]$

(c) Sea p_1 el menor entero tal que $\left|y_{p_1}^{(1)}\right| = \left\|\vec{y}^{(1)}\right\|_\infty$. Se define $\vec{x}^{(1)} = \frac{\vec{y}^{(1)}}{y_{p_1}^{(1)}}$ y se tiene que $\left|x_{p_1}^{(1)}\right| = 1 = \left\|\vec{x}^{(1)}\right\|_\infty$

(d) Se define $\vec{y}^{(2)} = A\vec{x}^{(1)}$ y $\mu^{(2)} = y_{p_1}^{(2)} = \frac{y_{p_1}^{(2)}}{x_{p_1}^{(1)}} = \frac{\left[\beta_1\lambda_1^2 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j\lambda_j^2 v_{p_1}^{(j)}\right]/y_{p_1}^{(1)}}{\left[\beta_1\lambda_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j\lambda_j v_{p_1}^{(j)}\right]/y_{p_1}^{(1)}} = \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^2 v_{p_1}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right) v_{p_1}^{(j)}}\right]$

(e) Sea p_2 el menor entero tal que $\left|y_{p_2}^{(2)}\right| = \left\|\vec{y}^{(2)}\right\|_\infty$

(f) Se define $\vec{x}^{(2)} = \frac{\vec{y}^{(2)}}{y_{p_2}^{(2)}} = \frac{A\vec{x}^{(1)}}{y_{p_2}^{(2)}} = \frac{A^2\vec{x}^{(0)}}{y_{p_2}^{(2)} y_{p_1}^{(1)}}$ y se tiene que $\left|x_{p_2}^{(2)}\right| = 2 = \left\|\vec{x}^{(2)}\right\|_\infty$

(g) De modo semejante se definen las sucesiones $\left\{\vec{x}^{(m)}\right\}_{m=0}^{\infty}$, $\left\{\vec{y}^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ y $\left\{\mu^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ mediante:

i. $\vec{y}^{(m)} = A\vec{x}^{(m-1)}$

ii. $\mu^{(m)} = y_{p_{m-1}}^{(m)} = \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m v_{p_{m-1}}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{m-1} v_{p_{m-1}}^{(j)}}\right]$

iii. p_m el menor entero tal que $\left|y_{p_m}^{(m)}\right| = \left\|\vec{y}^{(m)}\right\|_\infty$

iv. $\vec{x}^{(m)} = \frac{\vec{y}^{(m)}}{y_{p_m}^{(m)}} = \frac{A^m\vec{x}^{(0)}}{\prod_{k=1}^m y_{p_k}^{(k)}}$

(h) Se tiene que $\lim_{m\to\infty} \mu^{(m)} = \lambda_1$ y $\lim_{m\to\infty} \vec{x}^{(m)} = \vec{v}^{(1)}$ donde $\left\|\vec{v}^{(1)}\right\| = 1$.

Problemas

1. Dado el SEL:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resuelva el SEL mediante el método Gauss-Seidel, y calcule el error relativo.

(a) Obs: $\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

2. Sea la matriz A y el vector $\vec{x}^{(0)}$ dados, obtenga el mayor valor propio de A através del método de la potencia.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obs: 6, 3, 2 son valores propios de A.

Respuestas

1. Gauss-Seidel

(a) $M = -(D+L)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

(b) $\vec{N} = (D+L)^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}$

(c) $\vec{x}^{k+1} = M\vec{x}^k + \vec{N} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2^k + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}x_2^k - \frac{1}{2}x_3^k + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8}x_2^k + \frac{1}{4}x_3^k + \frac{3}{16} \end{bmatrix}$

i. $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ii. $\vec{x}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}$

iii. $\vec{x}^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{7}{32} \end{bmatrix}$

iv. $\vec{x}^3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{32} \\ \frac{1}{32} \\ \frac{15}{64} \end{bmatrix}$

v. $\vec{x}^4 = \begin{bmatrix} \frac{15}{64} \\ \frac{1}{64} \\ \frac{31}{128} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.234\,375 \\ 0.015\,625 \\ 0.242\,187\,5 \end{bmatrix}$

vi. $\vec{x}^5 = \begin{bmatrix} \frac{31}{128} \\ \frac{1}{128} \\ \frac{63}{256} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.242\,187\,5 \\ 0.007\,812\,5 \\ 0.246\,093\,75 \end{bmatrix}$

(d) $E_{rel} = \dfrac{\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.242\,187\,5 \\ 0.007\,812\,5 \\ 0.246\,093\,75 \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right\|} = \frac{0.007\,812\,5}{0.25} = 0.031\,25 \leq 5 \times 10^{-2}$

2. Método de la Potencia

m	$\left(\vec{y}^{(m)}\right)^t = \left(A\vec{x}^{(m-1)}\right)^t$	$\mu^{(m)} = y^{(m)}_{p_{m-1}}$	p_m tal que $\left\|y^{(m)}_{p_m}\right\| = \left\|\vec{y}^{(m)}\right\|_\infty$	$\left(\vec{x}^{(m)}\right)^t = \frac{\left(\vec{y}^{(m)}\right)^t}{y^{(m)}_{p_m}}$
0			1	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix}10 & 8 & 1\end{bmatrix}$	10	1	$\begin{bmatrix}1 & 0.8 & 0.1\end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix}7.2 & 5.4 & -0.8\end{bmatrix}$	7.2	1	$\begin{bmatrix}1 & 0.75 & -0.111\,111\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}6.5 & 4.75 & -1.222\,222\end{bmatrix}$	6.5	1	$\begin{bmatrix}1 & 0.730\,769 & -0.188\,034\end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix}6.230\,766 & 4.499\,997 & -1.376\,068\end{bmatrix}$	6.230 766	1	$\begin{bmatrix}1 & 0.722\,222 & -0.220\,850\end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix}6.111\,108 & 4.388\,886 & -1.441\,7\end{bmatrix}$	6.111 108	1	$\begin{bmatrix}1 & 0.718\,182 & -0.235\,915\end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix}6.054\,548 & 4.336\,366 & -1.471\,83\end{bmatrix}$	6.054 548	1	$\begin{bmatrix}1 & 0.716\,216 & -0.243\,095\end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix}6.027\,024 & 4.310\,808 & -1.486\,19\end{bmatrix}$	6.027 024	1	$\begin{bmatrix}1 & 0.715\,247 & -0.246\,5878\end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix}6.013\,458 & 4.298\,211 & -1.493\,175\,6\end{bmatrix}$	6.013 458	1	$\begin{bmatrix}1 & 0.714\,765 & -0.248\,306\end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix}6.006\,71 & 4.291\,945 & -1.496\,612\end{bmatrix}$	6.006 71	1	$\begin{bmatrix}1 & 0.714\,525 & -0.249\,157\end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix}6.003\,35 & 4.288\,825 & -1.498\,314\end{bmatrix}$	6.003 35	1	$\begin{bmatrix}1 & 0.714\,405 & -0.249\,580\end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix}6.001\,67 & 4.287\,265 & -1.499\,16\end{bmatrix}$	6.001 67	1	$\begin{bmatrix}1 & 0.714\,345 & -0.249\,790\end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix}6.000\,83 & 4.286\,485 & -1.499\,58\end{bmatrix}$	6.000 83	1	$\begin{bmatrix}1 & 0.714\,315 & -0.249\,895\end{bmatrix}$