Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos.
Fecha: 20 de Agosto

Complemento: Factorización y Métodos Iterativos

Resumen Materia

1. **Matriz tridiagonal:** Una matriz A cuadrada es tridiagonal si sus coeficientes no nulos se ubican en las diagonales principal y secundarias.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. **Método de Crout para matrices tridiagonales:** Una matriz tridiagonal puede ser factorizada $A = LU$ como:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & l_{44} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & l_{n(n-1)} & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & u_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Condición Inicial
      i. $l_{11} = a_{11}$
      ii. $u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$

   (b) Para $i = 2, ..., n-1$
      i. $l_{i(i-1)} = a_{i(i-1)}$
      ii. $l_{ii} = a_{ii} - l_{i(i-1)}u_{(i-1)i}$
      iii. $u_{i(i+1)} = \frac{a_{i(i+1)}}{l_{ii}}$

   (c) Para $i = n$
      i. $l_{n(n-1)} = a_{n(n-1)}$
      ii. $l_{nn} = a_{nn} - l_{n(n-1)}u_{(n-1)n}$

   Algoritmo de Crout

```
L[1,1]=a[1,1]
U[1,2]=a[1,1]/ L[1,1]
For k=2 To (n-1)
    L[k,k-1]=a[k,k-1]
    L[k,k]=a[k,k]-L[k,k-1]*U[k-1,k]
    U[k,k+1]=a[k,k+1]/L[k,k]
End For k
L[n,n-1]=a[n,n-1]
L[n,n]=a[n,n]-L[n,n-1]*U[n-1,n]
```

3. **Matriz Definida Positiva:**

   (a) Una matriz cuadrada A es definida positiva si y solo si: $\vec{x}^t A \vec{x} > 0 \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

   (b) Teorema: Si A es definida positiva, entonces se cumple:

      i. $det(A) \neq 0$

      ii. $a_{kk} > 0 \ \forall k = 1, \ldots, n$

      iii. $\max\limits_{1 \leq j,k \leq n} |a_{kj}| \leq \max\limits_{1 \leq k \leq n} |a_{kk}|$

      iv. $(a_{ij})^2 \leq a_{ii} a_{jj} \ \forall i \neq j$

   (c) Teorema: A es definida positiva si y solo si los determinantes de las matrices cofactores principales son positivos: $det(A_{kk}) > 0 \ \forall k = 1, \ldots, n$ donde

   $$A_{kk} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

   (d) Teorema: A es definida positiva si y solo si puede factorizarse como $A = LL^t$ donde L es una matriz triangular inferior con $l_{ii} > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$.

4. **Método de Cholesky:**

   (a) $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

   (b) Para $j = 2, ..., n \quad l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}$

   (c) Para $i = 2, ..., n-1$ y $j = (i+1), \ldots, n$

      i. $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} (l_{ik})^2}$ $\qquad l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}}{l_{ii}}$

   (d) $l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} (l_{nk})^2}$

   Algoritmo de Cholesky

```
L[1,1]=sqrt(a[1,1])
For j=2 To n
    L[j,1]=a[j,1]/L[1,1]
End For j
For k=2 To (n-1)
   sum=0
   For m=1 To (k-1)
       sum=sum+L[k,m]*L[k,m]
   End For m
   L[k,k]=sqrt(a[k,k]-sum)
   For i=k+1 To n
        sum=0
        For m=1 To (k-1)
            sum=sum+L[i,m]*L[k,m]
        End For m
        L[i,k]=(a[i,k]-sum)/L[k,k]
   End For i
End For k
```

5. **Método Iterativo:**

   (a) La idea es empezar con una aproximación inicial $\vec{x}^{(0)}$ a la solución $\vec{x}$ del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, y generar una sucesión de vectores $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ que converge a $\vec{x}$.

   (b) La forma de los elementos de la sucesión es $\vec{x}^{(k+1)} = f(\vec{x}^{(k)})$

   (c) Los métodos más utilizados son del tipo $f(\vec{x}^{(k)}) = B\vec{x}^{(k)} + \vec{h}$ donde $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$

6. **Construyendo un Método Iterativo:**

   (a) Sean M y $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que: M es invertible y $A = M - N$

   (b) $Ax = b \iff Mx = Nx + b \iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

   (c) $B = M^{-1}N$ y $h = M^{-1}b$

   (d) Se puede descomponer A como $A = diag(A) + low(A) + up(A)$ donde

      i. $diag(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$ matriz diagonal

      ii. $low(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \quad i > j \\ 0 & si \quad i \leq j \end{cases}$ matriz triangular inferior

      iii. $up(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \quad i < j \\ 0 & si \quad i \geq j \end{cases}$ matriz triangular superior

7. **Método de Jacobi:**

   (a) se define M y N

      i. $M = diag(A)$

      ii. $N = -[low(A) + up(A)]$

      iii. $B = -diag(A)^{-1}[low(A) + up(A)]$

      iv. $h = diag(A)^{-1}b$

   (b) El vector de la iteración k del método de Jacobi satisface la siguiente fórmula iterativa:

   $$x_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right)}{a_{ii}} \quad 1 \leq i \leq n, \; k = 1, 2, 3...$$

8. **Método de Gauss - Seidel:**

   (a) se define M y N

      i. $M = [diag(A) + low(A)]$

      ii. $N = -up(A)$

      iii. $B = -\left[diag(A) + low(A)\right]^{-1}\left[up(A)\right]$

      iv. $h = \left[diag(A) + low(A)\right]^{-1} b$

   (b) El vector de la iteración k del método de Gauss-Seidel satisface la siguiente fórmula iterativa:

   $$x_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right)}{a_{ii}} \quad 1 \leq i \leq n, \; k = 1, 2, 3...$$

9. **Análisis de Error de los Métodos Iterativos:** Si $x^{(k)}$ es la iteración k de J o G-S y $Ax = b$:
   $\frac{\left\|x - x^{(k)}\right\|}{\|x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\left\|b - Ax^{(k)}\right\|}{\|b\|}$

Problemas

1. Analice el algoritmo de Cholesky.

2. Sea la matriz de Pascal:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine si es definida positiva

   (b) Si lo es, determine su descomposición de Cholesky.

3. Dado el SEL:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Resuelva el SEL mediante el método Gauss-Seidel, y calcule el error relativo.

   Obs: $\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

<u>Soluciones</u>

1. Algoritmos

   (a) Cholesky

$$Ops = \sqrt{} + \sum_{j=2}^{n} D + \sum_{k=2}^{n-1}\left[\sum_{m=1}^{k-1}(M,S) + (\sqrt{},R) + \sum_{i=k+1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k-1}(S,M) + (R,D)\right)\right]$$

i. $= \sqrt{} + (n-1)D + \sum_{k=2}^{n-1}\left[(k-1)(M,S) + (\sqrt{},R) + \sum_{i=k+1}^{n}((k-1)(S,M) + (R,D))\right]$

$= \sqrt{} + (n-1)D + (M,S)\sum_{k=2}^{n-1}(k-1) + (\sqrt{},R)\ (n-2) + (S,M)\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n}(k-1) + (R,D)\sum_{k=2}^{n-1}(n-k)$

$= \sqrt{} + (n-1)D + (M,S)\frac{(n-1)(n-2)}{2} + (\sqrt{},R)\ (n-2) + (S,M)\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)(n-k) + (R,D)\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

$= \sqrt{}(n-1) + D(n-1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}) + R(n-2+\frac{(n-1)(n-2)}{2}) + (S,M)(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1}((n+1)k - n - k^2))$

$= \sqrt{}(n-1) + D(\frac{n(n-1)}{2}) + R(\frac{n(n-1)-2}{2}) + (S,M)(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n+1)\frac{(n-2)(n+1)}{2} - n(n-2) - \frac{(2n-1)(n-1)n}{6} + 1)$

$= \sqrt{}(n-1) + D(\frac{n(n-1)}{2}) + R(\frac{n(n-1)-2}{2}) + (S,M)(\frac{1}{6}n^3 - \frac{7}{6}n + 1)$ / tomando todas las operaciones

$= (n-1) + (\frac{n(n-1)}{2}) + (\frac{n(n-1)-2}{2}) + (\frac{1}{6}n^3 - \frac{7}{6}n + 1) = \frac{n^3+6n^2-7n-6}{6}$

$\implies O(n^3)$

2. $P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{bmatrix}$

   (a) Definida positiva

      i. $\det(P_{11}) = |6| > 0$

      ii. $\det(P_{22}) = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix} = 3 > 0$

      iii. $\det(P_{33}) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix} = 1 > 0$

   (b) Descomposición de Cholesky

$$L = \begin{bmatrix}\sqrt{1} & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{1}} & \sqrt{2-\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^2} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{1}} & \frac{3-\frac{1}{\sqrt{1}}\times\frac{1}{\sqrt{1}}}{\sqrt{2-\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^2}} & \sqrt{6-\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^2-\left(\frac{3-\frac{1}{\sqrt{1}}\times\frac{1}{\sqrt{1}}}{\sqrt{2-\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^2}}\right)^2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

   (c) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{bmatrix}$

3. Gauss-Seidel

   (a) $M = -(D+L)^{-1}U = -\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

   (b) $\vec{N} = (D+L)^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{8}\\ \frac{3}{16}\end{bmatrix}$

   (c) $\vec{x}^{k+1} = M\vec{x}^k + \vec{N} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^k\\ x_2^k\\ x_3^k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{8}\\ \frac{3}{16}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}x_2^k + \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}x_2^k - \frac{1}{2}x_3^k + \frac{1}{8}\\ -\frac{1}{8}x_2^k + \frac{1}{4}x_3^k + \frac{3}{16}\end{bmatrix}$

      i. $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

ii. $\vec{x}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}$

iii. $\vec{x}^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{7}{32} \end{bmatrix}$

iv. $\vec{x}^3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{32} \\ \frac{1}{32} \\ \frac{15}{64} \end{bmatrix}$

v. $\vec{x}^4 = \begin{bmatrix} \frac{15}{64} \\ \frac{1}{64} \\ \frac{31}{128} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.234\,375 \\ 0.015\,625 \\ 0.242\,187\,5 \end{bmatrix}$

vi. $\vec{x}^5 = \begin{bmatrix} \frac{31}{128} \\ \frac{1}{128} \\ \frac{63}{256} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.242\,187\,5 \\ 0.007\,812\,5 \\ 0.246\,093\,75 \end{bmatrix}$

(d) $E_{rel} = \dfrac{\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.242\,187\,5 \\ 0.007\,812\,5 \\ 0.246\,093\,75 \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right\|} = \frac{0.007\,812\,5}{0.25} = 0.031\,25 \leq 5 \times 10^{-2}$