



Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos.
Fecha: 04 de Agosto

Auxiliar 1: Representación Numérica

Resumen Materia

1. **Representación de números enteros:** $p = \sum_{i=0}^n \alpha_i b^i$ donde $b = 2, 8, 10$ y $\alpha_k \in \{0, \dots, b-1\}$
2. **Representación de números reales en $[0, 1]$ en codificación diádica:** $p = \sum_{i=1}^n \alpha_i 2^{-i}$ donde $\alpha_k \in \{0, 1\}$
3. **Representación de números reales:** $x = \pm m \cdot b^z$ donde $b \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{Z}$, $m \in [0, 1]$
4. **Representación de punto flotante:** $x = \pm 0.m_1 m_2 \dots m_t \cdot b^z$ donde $b \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N} \setminus \{\infty\}$, $z \in \mathbb{Z}$, $m_i \in \{0, \dots, b-1\}$. El número t es el número de cifras significativas.
5. **Representación de punto flotante actual:** $x = (-1)^s 2^{(z-c)} (1 + m)$ donde $s \in \{0, 1\}$, $c = 1023$, $z \in \{0, 1, \dots, 2^{11} - 1\}$, $m = m_1 m_2 \dots m_{52}$ con $m_i \in \{0, 1\}$

Ejercicios

1. Determinar un algoritmo para obtener la codificación binaria de un número natural, otro para obtener la codificación diádica de un número entre $[0, 1]$.
2. Usando los dos algoritmos anteriores, explique en forma algorítmica como codificar un número real cualquiera. Aplique el algoritmo con $x = 236.892$ en codificación FL de 32 bits.
3. Un grupo de ingenieros de Beaufort, que trabajan en la NASA recibieron en su receptor atómico el siguiente código binario: 01101010111110001111. Los ingenieros, quienes obtuvieron excelentes promedios en Cálculo Numérico, creen que se trata de algún mensaje de extraterrestres, los cuales desesperados por saber que dicen, proponen la siguiente codificación de punto flotante: una modificación de la codificación floating point inicial de 19 bits con los siguientes parámetros: 1 bit signo, 1 bit signo exponente, 7 bits exponente y 11 bits para la mantisa.
 - (a) Decodifique el mensaje de los extraterrestres
 - (b) Los ingenieros creen saber lo que dicen, por lo que deciden mandar un mensaje utilizando la codificación anterior. El mensaje es 56.715, que es la respuesta a la pregunta fundamental del Universo. Los ingenieros desean saber cual es la pregunta fundamental del Universo. Codifique el mensaje.
 - (c) Luego de esperar un rato, y sin obtener respuesta alguna, uno de los ingenieros, el más superticioso de todos, cree que si manda algunos mensajes claves, los extraterrestres los tomarán en cuenta. Deciden mandar los mensajes más importantes de su codificación: el máximo, el mínimo y el más cercano a cero. Uno de los físicos del lugar no sabía cuales eran estos números. Dígame por favor al físico cuales son aquellos números.
 - (d) Nuevamente sin respuesta, los ingenieros deciden ocupar la codificación actual floating point para mandar el siguiente mensaje: 0.97542, que corresponde al cociente entre el día solar y el día sideral. (Cualquier coincidencia con la realidad, es solo coincidencia). Codifique el mensaje para ser enviado.
 - (e) A los 32 segundos de ser enviado el mensaje, se obtiene respuesta de los extraterrestres. El mensaje obtenido es el siguiente: 000000010001110101110001001100...00. Decodifique el mensaje
 - (f) Al analizar el mensaje mandado por los extraterrestres, los ingenieros llegan a la conclusión que fue un mensaje de guerra. Suponiendo que el mensaje fue recibido por los extraterrestres, y enviado inmediatamente de vuelta, y sabiendo que la velocidad de las ondas electromagnéticas es de $c = 300000 \left[\frac{km}{seg} \right]$, ¿cuanto tiempo de vida nos queda? ¿que tan lejos se encuentran los extraterrestres?

Respuestas

1. Algoritmos

(a) Binaria

```

For k=0 To n
  if (x es par){
    a[k]=0;
    x=x/2;
  } else{
    a[k]=1;
    x=(x-1)/2;
  }
}
End k

```

1. (b) Diádica

```

x=(int)x*(2^n);
For k=n To 1
  if (x es par){
    a[k]=0;
    x=x/2;
  } else{
    a[k]=1;
    x=(x-1)/2;
  }
}

```

2. Codificación número real

(a) Algoritmo

- i. Determinar la notación científica con la mantisa normalizada, es decir, $m \in [0, 1]$
- ii. Cambiar base 10 a base 2 dividiendo por potencia de 2 más cercana a la potencia de 10. Esta es $\lceil \log_2(10^z) \rceil$
- iii. Recalcular la mantisa como $m^* = m * \frac{10^z}{2^{\lceil \log_2(10^z) \rceil}}$. Si $m^* < 0.5$, entonces $\lceil \log_2(10^z) \rceil = \lceil \log_2(10^z) \rceil - 1$, $m^* = 2 \times m^*$
- iv. Determinar codificación binaria para el exponente y codificación diádica para la mantisa.

(b) Aplicando el algoritmo a $x = 236.892$

- i. $x = 236.892 = x = 0.236892 \times 10^3$
- ii. $\lceil \log_2(10^3) \rceil = \lceil 9.9657842846620870436 \rceil = 10 \implies x = 0.236892 \times \frac{10^3}{2^{10}} \times 2^{10}$
- iii. $m^* = 0.236892 \times \frac{10^3}{2^{10}} = 0.23133984375 < 0.5 \implies m^* = 2 \times 0.23133984375 = 0.4626796875 \implies m^* = 2 \times 0.4626796875 = 0.925359375$, $e = 8$

(c) Codificación binaria

- i. Exponente: $e = 8 \implies 0001000$
- ii. Mantisa: $m = 0.925359375 \implies m * 2^{23} = 0.925359375 * 2^{23} = 7762477.056 \implies 7762477$
- iii. Codificar la mantisa

$\frac{7762477}{2} = 3881238$	$\frac{3881238}{2} = 1940619$	$\frac{1940619-1}{2} = 970309$	$\frac{970309-1}{2} = 485154$
impar	par	impar	par
1	0	1	0
$\frac{485154}{2} = 242577$	$\frac{242577-1}{2} = 121288$	$\frac{121288}{2} = 60644$	$\frac{60644}{2} = 30322$
impar	par	par	impar
1	0	0	1
$\frac{15161-1}{2} = 7580$	$\frac{7580}{2} = 3790$	$\frac{3790}{2} = 1895$	$\frac{1895-1}{2} = 947$
par	par	impar	impar
0	0	1	1
$\frac{236}{2} = 118$	$\frac{118}{2} = 59$	$\frac{59-1}{2} = 29$	$\frac{29-1}{2} = 14$
par	impar	impar	par
0	1	1	0
$\frac{14}{2} = 7$	$\frac{7-1}{2} = 3$	$\frac{3-1}{2} = 1$	
impar	impar	impar	
1	1	1	

iv. Codificación: 0 0 0001000 11101100111001000101101

- v. $1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6} + 0 \times 2^{-7} + 0 \times 2^{-8} + 1 \times 2^{-9} + 1 \times 2^{-10} + 1 \times 2^{-11} + 0 \times 2^{-12} + 0 \times 2^{-13} + 1 \times 2^{-14} + 0 \times 2^{-15} + 0 \times 2^{-16} + 0 \times 2^{-17} + 1 \times 2^{-18} + 0 \times 2^{-19} + 1 \times 2^{-20} + 1 \times 2^{-21} + 0 \times 2^{-22} + 1 \times 2^{-23} = 0.92535936832427978516$

vi. $fl(x) = 0.92535936832427978516 \times 2^8 = 236.89199829101562$

3. floating point

- (a)

Signo	Mantisa	Signo	Exponente	Exponente	Mantisa
0		1		1010101	11110001111

 - i. Signo Mantisa: +
 - ii. Signo Exponente: -
 - iii. Exponente: $1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 85$
 - iv. Mantisa: $1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + 0 \times 2^{-5} + 0 \times 2^{-6} + 0 \times 2^{-7} + 1 \times 2^{-8} + 1 \times 2^{-9} + 1 \times 2^{-10} + 1 \times 2^{-11} = 0.94482421875$
 - v. Número: $+0.94482421875 \times 2^{-85} = 2.4423133625642525496 \times 10^{-26}$

(b) $56.715 = 0.56715 \times 10^2 = 0.56715 \times 10^2 \times \frac{2^6}{2^6} = 0.56715 \times \frac{10^2}{2^6} \times 2^6 = 0.56715 \times 1.5625 \times 2^6 = 0.886171875 \times 2^6$

 - i. Signo Mantisa: +
 - ii. Signo Exponente: +
 - iii. Exponente: $6 = 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}
	1	1	1	0	0

 - iv. Mantisa:

0.886171875	0.386171875	0.136171875	0.011171875	0.011171875	0.011171875
2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
0	1	0	1	1	0
0.011171875	0.003359375	0.003359375	0.00140625	0.0004296875	0.0004296875
 - v.

Signo	Mantisa	Signo	Exponente	Mantisa
0		0	0000110	11100010110

(c) Maximos y Minimos

 - i. Real Máximo: $0\ 0\ 1111111\ 111111111111 = \frac{2^{11}-1}{2^{11}} \times 2^{127} = 0.99951171875 \times 2^{127}$
 - ii. Real Mínimo: $1\ 0\ 1111111\ 111111111111 = -\frac{2^{11}-1}{2^{11}} \times 2^{127} = -0.99951171875 \times 2^{127}$
 - iii. Real Más cercano a cero positivo: $0\ 1\ 1111111\ 00000000001 = 2^{-11} \times 2^{-127} = 2^{-138} = 2.8698592549372253613 \times 10^{-42}$
 - iv. Real Más cercano a cero negativo: $1\ 1\ 1111111\ 00000000001 = -2^{-11} \times 2^{-127} = -2^{-138} = -2.8698592549372253613 \times 10^{-42}$

(d) $0.975421 = 2^{z-c}(1+m)$

 - i. Escogemos z de manera que $z - 1023 = -1 \Rightarrow z = 1022$
 - ii. Luego: $m = 2 \times 0.975421 - 1 = 0.950842$
 - iii. La codificación binaria de $z = 1022$ es: 0111111110
 - iv. La codificación diádica de $m = 0.950842$ es: 1111001101101010011000011001110110101001110010011001

(e) Decodificar 0 0000001000 1110101110001001100...00

 - i. El número real es: $x = (-1)^s 2^{z-c} (1+m)$
 - ii. El signo es $s = 0$
 - iii. El exponente es: $z = 00000001000 = 2^3 = 8$. Luego $z - c = 8 - 1023 = -1015$
 - iv. La mantisa es: $m = 1110101110001001100...00 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \left(\frac{1}{2}\right)^{13} + \left(\frac{1}{2}\right)^{16} + \left(\frac{1}{2}\right)^{17} = 0.92006683349609375$
 - v. Finalmente: $x = (-1)^0 2^{-1015} (1 + 0.920066)$
 - vi. Nos van a atacar el 1 de Septiembre de 2006 a las 10:15 horas. Que el físico calcule lo demás.