Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre Primavera 2006
Cálculo Numérico
MA33A-01

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos.
Fecha: 25 de Agosto

Problemas Resueltos

Problemas

1. Sea una codificación binaria floating point tipo inicial, donde el número real máximo representable es $2^{63} - 2^{54}$.
   (a) Explique cuantos bits son necesarios para implementar esta codificación y como se distribuyen.
   (b) Sea $a = a_1 a_2 ... a_n$ donde n es el números de bits de la codificación usada y sea
   $a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2j \vee i = 1 + 4j \ , j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
   Obtenga el real representado por a
   (c) Sea $f(x) = e^{x^2}$. Para una aritmética finita de 5 cifras significativas de redondeo, se sabe que $f(0.5) = 1.2840$.
   i) Calcule el polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x)$ en torno a $x_0 = 0$.
   ii) Calcule $p_4(0.5)$ con la misma aritmética.
   iii) Represente $f(0.5)$ y $p_4(0.5)$ según la codificación de punto flotante anterior. Calcule el error relativo y según esto concluya si $p_4(0.5)$ es o no una buena aproximación de $f(0.5)$

2. Considere la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Para una aritmética finita de 4 cifras significativas con redondeo:
   (a) Determine el polinomio de Taylor de order 3 de $f(x)$, $p_3(x)$,en torno a $x_0 = 0$.
   (b) Obtenga una cota teórica del error
   (c) Utilice $p_3(x)$ para aproximar $f(x)$ en los puntos $x = 0.25$ y 0.5. Determine el error absoluto y relativo cometido por esta aproximación. Compare con la cota obtenida anteriormente.
   (d) Grafique $p_3(x)$ y $f(x)$
   (e) Aproxime $I = \int_0^1 f(x)dx$ mediante $I_3 = \int_0^1 p_3(x)dx$. Determine el error absoluto y relativo cometido por esta aproximación.

3. Realice un análisis de propagación del error en el siguiente algoritmo:
   $\varphi(x, y, z) = x + (y + z)$

4. Dado el SEL:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Determine la descomposición $A = LU$ a través del método de Gauss.
   (b) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ utilizando la factorización $A = LU$.
   (c) Calcule el $\det(A)$. Si $\det(A) \neq 0$ calcule A^{-1} mediante el método de Gauss-Jordan.
   (d) Calcule $cond(A)$. La matriz A está bien o mal condicionada ? Qué efecto tiene el condicionamiento sobre la resolución de otro SEL similar al definido en este problema.

5. Cuente el número de operaciones de Gauss y Gauss-Jordan

6. Sea la matriz de Hilbert definida como $H_n = [\frac{1}{i+j+1}]_{i,j=0,1...n-1}$.
   (a) Resuelva el sistema $H_3 x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$
   (b) Resuelva el sistema anterior, pero cambiando la primera componente del lado derecho por 1.01
   (c) Calcule $Cond(H_3)$

7. Dada la matriz tridiagonal A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine su descomposición LU

(b) Para $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$ resuelva el SEL (A, b) mediante el Método de Crout.

(c) Es la matriz A definida positiva ? Si lo es determine su descomposición de Cholesky.

8. Sea el SEL definido por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Resuelva el SEL mediante el método de iterativo de Jacobi (5 iteraciones)

(b) Resuelva el SEL mediante el método iterativo de Gauss-Seidel (5 iteraciones)

(c) Compare las soluciones entregadas por los método iterativos con respecto a la solución entregada por el método de Gauss: $x = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.272727272727 \\ 0.181818181818 \\ 0.181818181818 \\ 0.272727272727 \end{bmatrix}$

Obs: ocupe $\vec{x}^0 = \vec{0}$

9. Dado el SEL:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Métodos Directos:

i) Determine su descomposición $A = LU$ y resuelva el SEL utilizando esta factorización.

iii) Es A definida positiva ? Si lo es determine su factorización de Cholesky y resuelva el SEL utilizando esta factorización.

(b) Métodos Iterativos:

i) Resuelva el SEL mediante el método Gauss-Seidel.

ii) Para el método SOR aplicado a matrices definidas positivas y tridiagonales, el valor óptimo de ω está dado por:

$$\overline{\omega} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_G)}}$$

Donde $\rho(T_G)$ es el radio espectral de la matriz del método de Gauss-Seidel T_G.
Calcule $\overline{\omega}$ y resuelva el SEL mediante el método SOR para $\overline{\omega}$.

Soluciones

1. Codificacion Binaria

(a) Como el número real máximo representable en una codificacion binaria siempre es $\frac{2^m - 1}{2^m} \times 2^{(2^e - 1)}$, donde m es la cantidad de bits de la mantisa, y e la cantidad de bits del exponente, esto equivale a $2^{2^e - 1} - 2^{(2^e - 1) - m}$, queda un sistema:

$$2^{63} - 2^{54} = 2^{2^e - 1} - 2^{(2^e - 1) - m} \implies \begin{matrix} 2^e - 1 = 63 \\ (2^e - 1) - m = 54 \end{matrix} \implies \begin{matrix} e = 6 \\ m = 9 \end{matrix}$$

Sumando el bit para el signo de la mantisa y el bit del signo del exponente, la codificación necesita $2 + 6 + 9 = 17$ bits.

(b) **Como son 17 bits, entonces**

i. Numero en codificacion binaria: $a = a_1 a_2 a_3 ... a_{17} = 11011101110111011$

ii. Número real:

A. Signo Mantisa: $-$

B. Signo Exponente: $-$

C. Exponente: $0\times 2^5+1\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0=29$

D. Mantisa: $1\times 2^{-1}+1\times 2^{-2}+0\times 2^{-3}+1\times 2^{-4}+1\times 2^{-5}+1\times 2^{-6}+0\times 2^{-7}+1\times 2^{-8}+1\times 2^{-9}=\frac{443}{512}=0.865\,234\,375$

E. Numero: $a=-\frac{443}{512}\times 2^{-29}=-443\times 2^{-38}=-1.\,611\,624\,611\,541\,628\,837\,6\times 10^{-9}$

(c) **Polinomio de Taylor**

i. $p_4(x)=1+x^2+\frac{1}{2}x^4$

ii. Se debe calcular con la aritmetica finita de 5 cifras con redondeo, entonces $\frac{0.062\,5}{2}=0.031\,25$, cumple la aritmética. Luego $p_4(0.5)=1+(0.5)^2+\frac{1}{2}(0.5)^4=1+0.25+\frac{0.062\,5}{2}=1.25+0.031\,25=1.28125$, reduciendo a 5 cifras con redondeo, queda $p_4(0.5)=1.2813$

iii. En representacion de punto flotante quedan:

A. $\boxed{f(0.5)}$ $1.\,284\,0=0.642\times 2^1$

	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0.642	0.142		0.017			0.001375			

$f(0.5)=00000001101001000$

B. $\boxed{p_4(0.5)}$ $1.2813=0.64065\times 2^1$

	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0.64065	0.14065		0.015 65			0.000 025			

$p_4(0.5)=00000001101001000$

C. $E_{rel}=\frac{|f(0.5)-p_4(0.5)|}{|f(0.5)|}=\frac{0.0027}{1.\,284\,0}=2.\,102\,803\,738\,317\,757\,009\,3\times 10^{-3}$

La representación de $f(0.5)$ y de $p_4(0.5)$ en esta decodificación es exactamente la misma, por lo que quiere decir que la aproximación, en terminos del punto flotante, es muy buena.

2. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

(a) Taylor

i. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$; $f^{(1)}(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; $f^{(2)}(x)=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$; $f^{(3)}(x)=-\frac{6\left(x^4-6x^2+1\right)}{(x^2+1)^4}$

ii. $f(0)=0$; $f'(0)=1$; $f''(0)=0$; $f'''(0)=-6$

iii. $p_3(x)=\frac{0}{0!}x^0+\frac{1}{1!}x^1+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-6}{3!}x^3=x-x^3$

i. $f^{(4)}(x)=\frac{24(x^5-10x^3+5x)}{(x^2+1)^5}$

(b) Cota del error

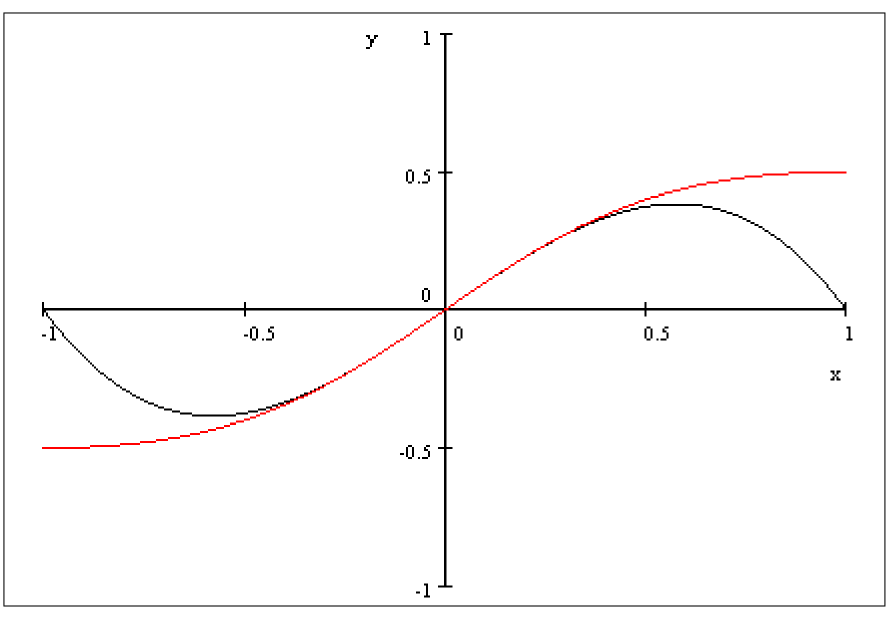
i. $E_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{(4)!}x^4\leq\frac{\max f^{(4)}(x)}{24}x^4=\frac{f^{(4)}(2-\sqrt{3})}{24}x^4=0.812\,2x^4$

(c) Aproximar

i. $p_3(0.25)=0.234\,4$; $f(0.25)=0.235\,3$; $E_{abs}=|\,f(0.25)-p_3(0.25)|=9\times 10^{-4}$; $E_{rel}=\frac{|\,f(0.25)-p_3(0.25)|}{|f(0.25)|}=3.\,825\times 10^{-3}$; $E_3(0.25)=3.\,173\times 10^{-3}$

ii. $p_3(0.5)=0.375$; $f(0.5)=0.4$; $E_{abs}=|\,f(0.5)-p_3(0.5)|=2.5\times 10^{-2}$; $E_{rel}=\frac{|\,f(0.5)-p_3(0.5)|}{|f(0.5)|}=6.2\,5\times 10^{-2}$; $E_3(0.5)=5.\,076\times 10^{-2}$

(d) Grafico. $f(x)$ rojo, $p_3(x)$ negro



(e) Integral

$\int\limits_0^1 p_3(x)dx = 0.25;$

$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\ln 2 = 0.346\,6$

$E_{abs} = |\ I - I_3| = 9.6\,6 \times 10^{-2}$

$E_{rel} = \frac{|\ I - I_3|}{|I|} = 2.78\,7 \times 10^{-1}$

3. Propagación de errores

(a) $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$; $x^{(2)} = u + v = x + y + z$

(b) $D\varphi^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $D\varphi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $fl(\varphi^{(0)}(x^{*(0)})) = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \oplus z^* \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* + z^* \end{pmatrix} \Longrightarrow e_1 = 0 \wedge e_2 = \varepsilon_{syz} \Longrightarrow E^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{syz} \end{bmatrix}$

(d) $fl(\varphi^{(1)}(x^{*(1)})) = u^* \oplus v^* = (1 + e_3)\,(u^* + v^*) \Longrightarrow e_3 = \varepsilon_{suv} \Longrightarrow E^{(2)} = \varepsilon_{suv}$

(e) $\triangle\varphi = D\varphi^{(1)} D\varphi^{(0)} \triangle x + D\varphi^{(1)} E^{(1)} \varphi^{(0)}(x^{*(0)}) + E^{(2)} \varphi^{(1)}(x^{*(1)})$

(f) $\triangle\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \\ \triangle z \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{syz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* + z^* \end{pmatrix} + \varepsilon_{suv}(x^* + y^* + z^*)$

(g) $\triangle\varphi = \triangle x + \triangle y + \triangle z + \varepsilon_{syz}\,(y^* + z^*) + \varepsilon_{suv}\,(x^* + y^* + z^*)$

(h) Pero $\varepsilon_{syz} = \frac{y}{y+z}\varepsilon_y + \frac{z}{y+z}\varepsilon_z$ y $\varepsilon_{suv} = \frac{u}{u+v}\varepsilon_u + \frac{v}{u+v}\varepsilon_v = \frac{x}{x+(y+z)}\varepsilon_x + \frac{(y+z)}{x+(y+z)}\varepsilon_{(y+z)}$, reemplazando

(i) $\triangle\varphi = \triangle x + \triangle y + \triangle z + \left(\frac{y}{y+z}\varepsilon_y + \frac{z}{y+z}\varepsilon_z\right)(y^* + z^*) + \left(\frac{x}{x+(y+z)}\varepsilon_x + \frac{(y+z)}{x+(y+z)}\varepsilon_{(y+z)}\right)(x^* + y^* + z^*)$

4. SEL

(a) Descomposicion LU

i. $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix};$

ii. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix};$

iii. $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$

iv. $m_{21} = -1\ m_{31} = 1\ m_{41} = -1;\ m_{32=} - 2\ m_{42=} 2;\ m_{43=} \frac{4}{7}$

v. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -\frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix}; U = A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$

(b) Resolver $Ax = b,$ con $A = LU$

i. $Ly = b \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -\frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ii. $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{8}{7} \end{bmatrix}$

iii. $Ux = y \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{8}{7} \end{bmatrix}$

iv. $x_n = \frac{u_{n(n+1)}}{u_{nn}} \iff x_4 = 1$

v. $x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(u_{k(n+1)} - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right) \quad k = (n-1), ..., 1$

A. $k = 3 \iff x_3 = \frac{1}{u_{33}} \left(y_3 - [u_{34} x_4] \right) = \frac{1}{7} \left(2 - [2 \times 1] \right) = 0$

B. $k = 2 \iff x_2 = \frac{1}{u_{22}} \left(y_2 - [u_{23} x_3 + u_{24} x_4] \right) = \frac{1}{1} \left(0 - [(-2) \times 0 + 1 \times 1] \right) = -1$

C. $k = 1 \iff x_1 = \frac{1}{u_{11}} \left(y_1 - [u_{12} x_2 + u_{13} x_3 + u_{14} x_4] \right) = \frac{1}{1} \left(1 - [(-1) \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 1] \right) = 1$

vi. $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) Determinante y A^{-1}

i. $\det(A) = u_{11} \times u_{22} \times u_{33} \times u_{44} = 1 \times 1 \times 7 \times \frac{8}{7} = 8 \neq 0$

ii. $\left[A \vdots I \right]^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

iii. $\left[A \vdots I \right]^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

iv. $\left[A \vdots I \right]^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

v. $\left[A \vdots I \right]^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{6}{7} & \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix}$

vi. $\left[A \vdots I \right]^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{6}{7} & \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} =$

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{8} \end{bmatrix}$

vii. $A^{-1} = I^4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{13}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{9}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{8} \end{bmatrix}$

(d) $cond(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| = \max\{4, 6, 7, 4\} \cdot \max\left\{\frac{6}{4}, \frac{34}{8}, \frac{6}{4}, \frac{26}{8}\right\} = 7 \cdot \frac{34}{8} = \frac{119}{4} = 29.75 \gg 1$
En consecuencia, la matriz A está mal condicionada. Como la matriz está mal condicionada, al perturbar levemente sus coeficientes, se genera una gran alteración de los resultados al resolver sistemas de ecuaciones cuya matriz de coeficientes sea esta.

5. Numero de Operaciones

(a) Gauss

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}\sum_{k=j}^{n+1}(D,M,R) \ + \ (D) \ + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{j=k+1}^{n}(R,M) \ + (D) \ \right)$$
$$= (D,M,R) \ \sum_{j=1}^{n-1}((n-j-1+1)+(n+1-j+1)) \ + \ (D) \ + \ \sum_{k=1}^{n-1}((R,M) \ (n-k-1+1)+(D))$$
$$= (D,M,R)2\sum_{j=1}^{n-1}(n-j+1) \ + \ (D) \ + \ (R,M)\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) \ + \ (D)(n-1)$$
$$= (D,M,R)2(n(n-1)-\tfrac{n(n-1)}{2}+(n-1)) \ + \ (D) \ + \ (R,M)(n(n-1)-\tfrac{n(n-1)}{2}) \ + \ (D)(n-1)$$
$$= (D,M,R)(n(n-1)+2(n-1))+(D)n \ + \ (R,M)\tfrac{n(n-1)}{2}$$
$$D = n(n-1)+2(n-1)+n = n^2+2n-2$$
$$M = n(n-1)+2(n-1)+\tfrac{n(n-1)}{2} = \tfrac{3}{2}n^2+\tfrac{1}{2}n-2$$
$$R = n(n-1)+2(n-1)+\tfrac{n(n-1)}{2} = \tfrac{3}{2}n^2+\tfrac{1}{2}n-2$$

(b) Gauss-Jordan

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}\sum_{k=j}^{n+1}(D,M,R) \ + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}\sum_{k=j}^{n+1}(D,M,R) \ + \ \sum_{k=1}^{n}(D)$$
$$= 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}\sum_{k=j}^{n+1}(D,M,R) \ + \ (D)n$$
$$= (D,M,R)2(n(n-1)+2(n-1)) \ + \ (D)n$$
$$D = 2(n(n-1)+2(n-1))+n = 2n^2+3n-4$$
$$M = 2(n(n-1)+2(n-1)) = 2n^2+2n-4$$
$$R = 2(n(n-1)+2(n-1)) = 2n^2+2n-4$$

(c) Contando el número total de operaciones:

i. Gauss: $D+M+R = n^2+2n-2+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-2+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-2 = 4n^2+3n-6$

ii. Gauss-Jordan: $D+M+R = 2n^2+3n-4+2n^2+2n-4+2n^2+2n-4 = 6n^2+7n-12$

(d) Se ve claramente que el algoritmo de Gauss es más eficiente que el algoritmo de Gauss-Jordan, pero ambos algoritmos son de orden $O(n^2)$

6. $H_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{0+0+1} & \frac{1}{0+1+1} & \frac{1}{0+2+1} \\ \frac{1}{1+0+1} & \frac{1}{1+1+1} & \frac{1}{1+2+1} \\ \frac{1}{2+0+1} & \frac{1}{2+1+1} & \frac{1}{2+2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \vdots & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \vdots & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \vdots & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \vdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \vdots & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \vdots & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \vdots & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \vdots & -9 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -24 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30 \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \vdots & -9 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -24 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -24 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1.01 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \vdots & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \vdots & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1.01 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \vdots & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \vdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1.01 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \vdots & 0.495 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \vdots & 0.663\,333\,333\,333\,333\,333\,33 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{1}{12}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\vdots&1.01\\0&1&1&\vdots&12\times 0.495\\0&\frac{1}{12}&\frac{4}{45}&\vdots&0.663\,333\,333\,333\,333\,333\,33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\vdots&1.01\\0&1&1&\vdots&5.94\\0&0&\frac{1}{180}&\vdots&0.168\,333\,333\,333\,333\,333\,33\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\vdots&1.01\\0&1&1&\vdots&5.94\\0&0&1&\vdots&180\times 0.168\,333\,333\,333\,333\,333\,33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0&\vdots&-9.09\\0&1&0&\vdots&-24.36\\0&0&1&\vdots&30.3\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0&\vdots&-9.09\\0&1&0&\vdots&-24.36\\0&0&1&\vdots&30.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&3.09\\0&1&0&\vdots&-24.36\\0&0&1&\vdots&30.3\end{bmatrix}$$

(c) $Cond(H_3)=\left\|\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\right\|\left\|\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}^{-1}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\right\|\left\|\begin{bmatrix}9&-36&30\\-36&192&-180\\30&-180&180\end{bmatrix}\right\|$

$=\left|1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right|\left|36+192+180\right|=748$

7. matriz tridiagonal A :

(a) Descomposición LU

i. $i=1$

A. $l_{11}=a_{11}=1$

B. $u_{12}=\frac{a_{12}}{l_{11}}=\frac{1}{2}$

ii. $i=2$

A. $l_{21}=a_{21}=\frac{1}{2}$

B. $l_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

C. $u_{23}=\frac{a_{23}}{l_{22}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$

iii. $i=3$

A. $l_{32}=a_{32}=\frac{1}{2}$

B. $l_{33}=a_{33}-l_{32}u_{23}=1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

C. $u_{34}=\frac{a_{34}}{l_{33}}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

iv. $i=4$

A. $l_{43}=a_{43}=\frac{1}{2}$

B. $l_{44}=a_{44}-l_{43}u_{34}=1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{8}$

v. $L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{5}{8}\end{bmatrix}$; $U=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&\frac{2}{3}&0\\0&0&1&\frac{3}{4}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

(b) Método de Crout

i. $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{5}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

A. $y_1=\frac{b_1}{l_{11}}=1$

B. $y_2=\frac{b_2-y_1l_{21}}{l_{22}}=-\frac{2}{3}$

C. $y_3=\frac{b_3-y_2l_{32}}{l_{33}}=\frac{1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=2$

D. $y_4=\frac{b_4-y_3l_{43}}{l_{44}}=\frac{-2\times\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}=-\frac{8}{5}$

ii. $\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&\frac{2}{3}&0\\0&0&1&\frac{3}{4}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-\frac{2}{3}\\2\\-\frac{8}{5}\end{bmatrix}$

A. $x_4=y_4=-\frac{8}{5}$

B. $x_3 = y_3 - x_4 u_{34} = 2 - \left(-\frac{8}{5}\right)\frac{3}{4} = \frac{16}{5}$
C. $x_2 = y_2 - x_3 u_{23} = -\frac{2}{3} - \frac{16}{5} \times \frac{2}{3} = -\frac{14}{5}$
D. $x_1 = y_1 - x_2 u_{12} = 1 - \left(-\frac{14}{5}\right)\frac{1}{2} = \frac{12}{5}$

(c) Descomposición de Cholesky

i. Definida positiva

A. $\det(A_{11}) = |1| = 1 > 0$

$$\det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0$$

$$\det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0$$

$$\det(A_{44}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{16} > 0$$

ii. $$L = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{l_{11}} & \sqrt{a_{22} - \sum_{k=1}^{2-1} (l_{2k})^2} & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{l_{11}} & \frac{a_{32} - \sum_{k=1}^{2-1} l_{3k} l_{2k}}{l_{22}} & \sqrt{a_{33} - \sum_{k=1}^{3-1} (l_{3k})^2} & 0 \\ \frac{a_{41}}{l_{11}} & \frac{a_{42} - \sum_{k=1}^{2-1} l_{4k} l_{2k}}{l_{22}} & \frac{a_{43} - \sum_{k=1}^{3-1} l_{4k} l_{3k}}{l_{33}} & \sqrt{a_{44} - \sum_{k=1}^{4-1} (l_{4k})^2} \end{bmatrix}$$

iii. $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\frac{1}{2} - 0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} & \sqrt{1 - \left[0 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right)^2\right]} & 0 \\ 0 & \frac{0 - 0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} & \frac{\frac{1}{2} - 0 - 0}{\sqrt{1 - \left[(0) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}} & \sqrt{1 - \left[0 + 0 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right)^2\right]} \end{bmatrix}$$

iv. $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

8. Métodos Iterativos

(a) Jacobi

$$M = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

i. $$N = D^{-1} b = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ii. $x^{k+1} = Mx^k + N \quad \vee \quad \begin{array}{ll} x_1^{k+1} = \frac{1}{3}\left(1 - x_2^k\right) & x_3^{k+1} = \frac{1}{3}\left(1 - \left[x_2^k + x_4^k\right]\right) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{3}\left(1 - \left[x_1^k + x_3^k\right]\right) & x_4^{k+1} = \frac{1}{3}\left(1 - x_3^k\right) \end{array}$

A. $$x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B. $$x^1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

C. $x^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}$

D. $x^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{27} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{8}{27} \end{bmatrix}$

E. $x^4 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{27} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{8}{27} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{13}{81} \\ \frac{13}{81} \\ \frac{7}{27} \end{bmatrix}$

F. $x^5 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{13}{81} \\ \frac{13}{81} \\ \frac{7}{27} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{68}{243} \\ \frac{47}{243} \\ \frac{47}{243} \\ \frac{68}{243} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.279\,84 \\ 0.193\,42 \\ 0.193\,42 \\ 0.279\,84 \end{bmatrix}$

(b) Método de Gauss-Seidel

i. $M = -(D+L)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$

ii. $N = (D+L)^{-1}\, b = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix}$

iii. $x^{k+1} = Mx^k + N \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}x_2^k + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9}x_2^k - \frac{1}{3}x_3^k + \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{27}x_2^k + \frac{1}{9}x_3^k - \frac{1}{3}x_4^k + \frac{7}{27} \\ \frac{1}{81}x_2^k - \frac{1}{27}x_3^k + \frac{1}{9}x_4^k + \frac{20}{81} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(1 - x_2^k\right) \\ \frac{1}{9}\left(x_2^k - 3x_3^k + 2\right) \\ \frac{1}{27}\left(7 - x_2^k + 3x_3^k - 9x_4^k\right) \\ \frac{1}{81}\left(x_2^k - 3x_3^k + 9x_4^k + 20\right) \end{bmatrix}$

A. $x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

B. $x^1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix}$

C. $x^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{13}{81} \\ \frac{16}{81} \\ \frac{65}{243} \end{bmatrix}$

D. $x^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{13}{81} \\ \frac{16}{81} \\ \frac{65}{243} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{68}{243} \\ \frac{127}{729} \\ \frac{407}{2187} \\ \frac{1780}{6561} \end{bmatrix} =$

E. $x^4 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{68}{243} \\ \frac{127}{729} \\ \frac{407}{2187} \\ \frac{1780}{6561} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{602}{2187} \\ \frac{1178}{6561} \\ \frac{1201}{6561} \\ \frac{5360}{19\,683} \end{bmatrix}$

F. $x^5 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{602}{2187} \\ \frac{1178}{6561} \\ \frac{1201}{6561} \\ \frac{5360}{19\,683} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5383}{19\,683} \\ \frac{10\,697}{59\,049} \\ \frac{32\,272}{177\,147} \\ \frac{144\,875}{531\,441} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.273\,48 \\ 0.181\,15 \\ 0.182\,18 \\ 0.272\,61 \end{bmatrix}$

(c) $$E_{rel}(x^5_{GJ}) = \frac{\left\| x_J - x^5_{GJ} \right\|_\infty}{\left\| x_J \right\|_\infty} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{68}{243} \\ \frac{47}{243} \\ \frac{47}{243} \\ \frac{68}{243} \end{bmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix} \right\|_\infty} = \frac{\frac{31}{2673}}{\frac{3}{11}} = \frac{31}{729} = 4.252\,4 \times 10^{-2}$$

$$E_{rel}(x^5_{GS}) = \frac{\left\| x_J - x^5_{GS} \right\|_\infty}{\left\| x_J \right\|_\infty} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5383}{19\,683} \\ \frac{10\,697}{59\,049} \\ \frac{32\,272}{177\,147} \\ \frac{144\,875}{531\,441} \end{bmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix} \right\|_\infty} = \frac{164}{59\,049} = 2.777\,4 \times 10^{-3}$$

En consecuencia, puesto que el Error Relativo para la quinta iteración, al aplicar el Método de Gauss-Jacobi es casi un orden de magnitud mayor que si aplicamos Gauss-Seidel, podemos decir que la mejor solución es la entregada por este último método.

9. SEL

(a) **Métodos Directos**

i. $A^0 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{0}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Definiendo $U\vec{x} = \vec{y}$ el sistema queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Resolviendo $U\vec{x} = \vec{y}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

ii. Es definida positiva si sus subdeterminantes son positivas

$|4| > 0$

$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 > 0$

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{vmatrix} = 32 > 0 \Longrightarrow$ es definida positiva

Entonces su factorizacion de Cholesky es

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(b) **Métodos Iterativos**

i. Gauss-Seidel

$$M = -(D+L)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\vec{N} = (D+L)^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{k+1} = M\vec{x}^k + \vec{N} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2^k + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}x_2^k - \frac{1}{2}x_3^k + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8}x_2^k + \frac{1}{4}x_3^k + \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

A. $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

B. $\vec{x}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}$

C. $\vec{x}^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{7}{32} \end{bmatrix}$

D. $\vec{x}^3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{32} \\ \frac{1}{32} \\ \frac{15}{64} \end{bmatrix}$

E. $\vec{x}^4 = \begin{bmatrix} \frac{15}{64} \\ \frac{1}{64} \\ \frac{31}{128} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.234\,375 \\ 0.015\,625 \\ 0.242\,187\,5 \end{bmatrix}$

F. $\vec{x}^5 = \begin{bmatrix} \frac{31}{128} \\ \frac{1}{128} \\ \frac{63}{256} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.242\,187\,5 \\ 0.007\,812\,5 \\ 0.246\,093\,75 \end{bmatrix}$

Solo 4 iteraciones eran necesarias, es decir, hasta $\vec{x}^4$.

ii. $\rho(T_G) = \max_{i=1\ldots n} |\lambda_i|$ donde λ_i es un valor propio de T_G

$\det(T_G - I\lambda) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \wedge \lambda_3 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \rho(T_G) = \frac{1}{2}$$

$$\overline{\omega} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(T_G)}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1} = 4 - 2\sqrt{2} = 2\left(2-\sqrt{2}\right) = 1.171\,572\,875\,253\,809\,902\,4$$

iii. Sor

$$\vec{x}^{k+1} = (1-\overline{\omega})\,\vec{x}^k + \overline{\omega}\left(M\vec{x}^k + \vec{N}\right) = (1-1.171\,5)\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + 1.171\,5\left[\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}\right] =$$

$$-0.1715\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + 1.171\,5\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2^k + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}x_2^k - \frac{1}{2}x_3^k + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8}x_2^k + \frac{1}{4}x_3^k + \frac{3}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.171\,5x_1^k - 0.585\,75x_2^k + 0.292\,875 \\ 0.121\,375\,x_2^k - 0.585\,75x_3^k + 0.146\,437\,5 \\ -0.146\,437\,5x_2^k + 0.121\,375\,x_3^k + 0.219\,656\,25 \end{bmatrix}$$

A. $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

B. $\vec{x}^1 = (1-1.171\,5)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1.171\,5\left[\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}\right] = 1.171\,5\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.292\,875 \\ 0.146\,437\,5 \\ 0.219\,656\,25 \end{bmatrix}$

C. $\vec{x}^2 = (1-1.171\,5)\begin{bmatrix} 0.292\,875 \\ 0.146\,437\,5 \\ 0.219\,656\,25 \end{bmatrix} + 1.171\,5\left[\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.292\,875 \\ 0.146\,437\,5 \\ 0.219\,656\,25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}\right]$

$= \begin{bmatrix} 0.156\,871\,171\,875 \\ 0.035\,547\,703\,125 \\ 0.224\,873\,085\,937\,5 \end{bmatrix}$

D. $\vec{x}^3 = (1-1.171\,5)\begin{bmatrix} 0.156\,871\,171\,875 \\ 0.035\,547\,703\,125 \\ 0.224\,873\,085\,937\,5 \end{bmatrix} + 1.171\,5\left[\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.156\,871\,171\,875 \\ 0.035\,547\,703\,125 \\ 0.224\,873\,085\,937\,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}\right] =$

$\begin{bmatrix} 0.245\,149\,526\,917\,968\,75 \\ 0.019\,032\,692\,378\,906\,25 \\ 0.241\,744\,704\,029\,296\,875 \end{bmatrix}$

Hasta acá es necesario, es decir, 3 iteraciones