MA26B - Matemáticas Aplicadas

Guía: Introduccion a Parametrizaciones

Prof: Carlos Conca
Jorge San Martín

Recordemos que una curva en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es un conjunto $\mathcal{C}$ que puede ser generado por alguna función $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ (donde $n=2$ ó 3 según corresponda) continua que satisface la condición $\mathcal{C}=\vec{r}([a,b])$. Es decir

$$\mathcal{C}=\{\vec{r}(t): t\in[a,b]\}$$

Sobre este tema de curvas hemos visto varias propiedades y cálculos que se pueden realizar a partir del conocimiento de la función $\vec{r}$. En esta guía queremos ilustrar cómo para ciertas curvas se puede encontrar una función $\vec{r}$ que cumpla lo anterior. Este proceso se conoce como la parametrización de la curva.

1. Curvas planas

1.1. Circunferencia

Esta es una de las más conocidas, se puede describir por la ecuación $x^2+y^2=R^2$ y se puede parametrizar por la fórmula

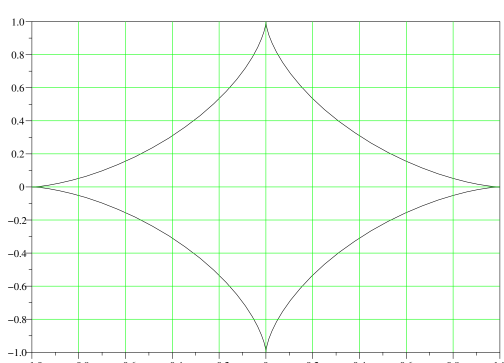
$$\vec{r}(\theta)=\begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix},\quad \theta\in[0,2\pi]$$

1.2. Astroide

Hay toda una familia de curvas que se obtienen como perturbaciones de la parametrización de la circunferencia del modo

$$\vec{r}(\theta)=\begin{pmatrix} R\cos^n\theta \\ R\operatorname{sen}^n\theta \end{pmatrix},\quad \theta\in[0,2\pi]$$

donde n es un número natural. La astroide es la que corresponde al caso $n=3$ y su gráfico, para $R=1$, es el siguiente:



1.3. Cicloides

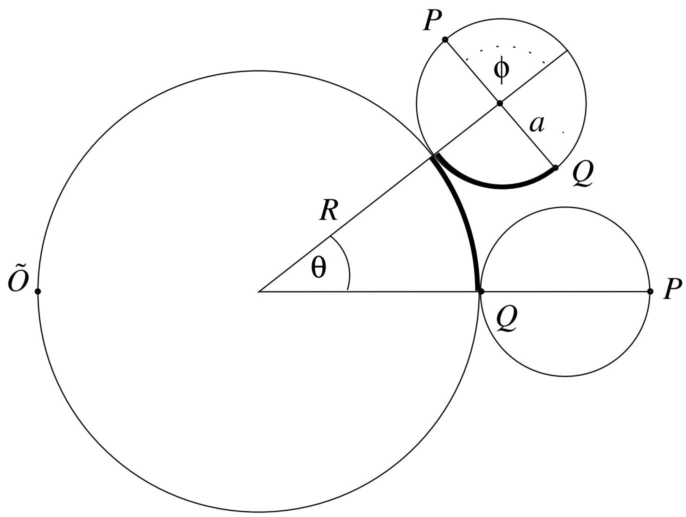
Estas curvas se obtienen al seguir la trayectoria que describe un punto solidario a un círculo que rueda sin resbalar sobre una recta horizontal.

Parametrizaciones de estas curvas han sido vistas en detalle en clases y son

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R\theta - a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ R - a\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

1.4. Cardioide

Estas curvas se obtienen al seguir la trayectoria que describe un punto solidario a un círculo que rueda sin resbalar sobre otro círculo. Consideremos la figura siguiente:



Las coordenadas del punto P son las siguientes:

$$\begin{aligned} x &= (R+a)\cos\theta + a\cos(\theta+\phi) \\ y &= (R+a)\,\mathrm{sen}\,\theta + a\,\mathrm{sen}\,(\theta+\phi) \end{aligned}$$

La condición de rodar sin resbalar se escribe

$$R\theta = a\phi$$

ya que los ángulos θ y ϕ describen el giro de cada círculo respecto de la recta que une los centros.

Con esta condición, la parametrización de la curva resulta

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} (R+a)\cos\theta + a\cos(\theta + R\theta/a) \\ (R+a)\,\mathrm{sen}\,\theta + a\,\mathrm{sen}\,(\theta + R\theta/a) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Un caso particular interesante es cuando $a = R$. En este caso se obtiene $\phi = \theta$ y por lo tanto la parametrización es

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} 2R\cos\theta + R\cos(2\theta) \\ 2R\,\mathrm{sen}\,\theta + R\,\mathrm{sen}\,(2\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Usando las identidades trigonométricas: $\mathrm{sen}\,(2\theta) = 2\mathrm{sen}\theta\cos\theta$ y $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$-1, la parametrización anterior se reescribe

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} 2R\cos\theta(1+\cos\theta) - R \\ 2R\,\mathrm{sen}\,\theta(1+\cos\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

El término $-R$ en la coordenada x sugiere tomar el origen en el punto $\tilde{O}$ de la figura (extremo izquierdo del círculo fijo). Con este origen, el factor $2R(1+\cos\theta)$ corresponde a la distancia ρ desde $\tilde{O}$ a P. Esto sugiere usar coordenadas polares, dado que la distancia es función del ángulo, así la curva tiene la ecuación

$$\rho = 2R(1+\cos\theta).$$

1.5. Curvas en coordenadas polares

Cada vez que se tenga una curva descrita en la forma $\rho = f(\theta)$ en coordenadas polares, su parametrización más directa es

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} f(\theta)\cos\theta \\ f(\theta)\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

1.6. Curvas dadas por funciones reales de variable real

El gráfico, $y = f(x)$, de una función continua en el intervalo $[a,b]$ es una curva plana. Su parametrización más directa es

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [a,b].$$

Ejercicio

Encontrar una expresión para la curvatura de la curva anterior, suponiendo que $f \in \mathcal{C}^2$.

Solución: Usando la parametrización anterior, se tiene

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}, \qquad ||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{1 + f'(t)^2}.$$

Por lo tanto, el vector tangente a la curva es

$$\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}.$$

De este modo, su curvatura es

$$\kappa \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} ||\hat{T}'|| = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$$

2. Hélices con diferentes perfiles

La hélice vista en clases es la que se parametriza

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\operatorname{sen}\theta \\ \frac{h}{2\pi}\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

Ella corresponde a un alambre que se enrolla sobre un cilindro vertical de radio R, subiendo una altura h en una vuelta completa. Se pueden obtener otras hélices, si el alambre anterior se enrolla sobre otras figuras.

Ejercicio

Un alambre se enrolla sobre el manto de un cono de radio basal R y altura h de modo que su altura en función del ángulo θ esta dado por la relación $z(\theta) = h(1 - e^{-\theta})$. Encontrar una parametrización de la curva descrita por el alambre y calcular su largo cuando $\theta \in [0, +\infty)$.

Solución: Asistir a clase auxiliar. Para realizar la parametrización, basta con conocer el radio del cono en función de la altura. Si dicho radio es $\rho(z)$ entonces la parametrización directa de la curva es

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} \rho(z(\theta))\cos\theta \\ \rho(z(\theta))\operatorname{sen}\theta \\ z(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, \infty).$$

Ejercicio

Una partícula se mueve sobre el manto de un paraboloide de revolución (en torno al eje Z) de ecuación $z = \pi - (x^2 + y^2)$. Se sabe que la altura $z(\theta)$ de la partícula satisface las relaciones

$$\frac{dz}{d\theta} = \text{constante}, \quad z(0) = 0$$

y es tal que en una vuelta alcanza la cúspide del paraboloide. Encuentre una paramerización de la curva, y calcule su vector tangente.

Solución: De las condiciones dadas para z se obtiene $z(\theta) = \frac{1}{2}\theta$. En el paraboloide se puede calcular su radio ρ en términos de $z(\theta)$ imponiendo

$$z = \pi - \rho^2.$$

De aqui se deduce que $\rho(\theta) = \sqrt{\pi - z(\theta)}$. Por lo tanto, la parametrización directa de esta curva es

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi - \theta/2}\cos\theta \\ \sqrt{\pi - \theta/2}\,\text{sen}\theta \\ \theta/2 \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

El vector tangente se obtiene usando las fórmulas vistas en clases (hágalo usted mismo).

3. Curvas planas en el espacio que resultan de intersecciones

Ejemplo: Encontrar una parametrización de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con el plano $x + y + z = 0$.

Solución: En muy fácil convencerse que la intersección es una circunferencia de radio R. Lo interesante es que ella vive en un plano inclinado. Para escribir una parametrización de esta curva conviene trabajar sobre el plano inclinado, y en ese plano, intentar escribir la parametrización clásica de la circunferencia. Como en las circunferencias planas, la parametrización más directa es $(Rcos\theta, Rsen\theta)$, se puede decir que vectorialmente $\vec{r} = Rcos\theta\hat{\imath} + Rsen\theta\hat{\jmath}$. Esta última ecuación se puede llevar al plano inclinado cambiando los roles de los vectores $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ por dos vectores unitarios perpendiculares contenidos en el plano inclinado.

Por ejemplo los vectores pueden ser $(1, -1, 0)/\sqrt{2}$ y $(1, 1, -2)/2$. Con esto se obtiene

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta/\sqrt{2} + R\,\text{sen}\theta/2 \\ -R\cos\theta/\sqrt{2} + R\,\text{sen}\theta/2 \\ -R\,\text{sen}\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Ejemplo 2: Encontrar una parametrización de la interseccion de la esferera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con el cilindro de radio $R/2$ y eje vertical $x = R/2$, $y = 0$, cuya ecuación es $(x - R/2)^2 + y^2 = R^2/4$.

Solución: Es un buen ejercicio intentar imaginarse la curva resultante de esta intersección haciendo un buen dibujo (convénzase que tiene la forma de un 8 sobre la esfera). Sin embargo, este problema se puede resolver exclusivamente usando herramientas analíticas, más un manejo de las simetrías.

Si se buscan los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen simultaneamente ambas ecuaciones resulta que

$$z^2 + Rx = R^2,$$

de donde se obtiene x en función de z. Ahora usamos cualquiera de las ecuaciones (por ejemplo la de la esfera) para encontrar y en función de z. Se obtiene

$$y = \pm\sqrt{R^2 - z^2 - \frac{(R^2 - z^2)^2}{R^2}} = \pm\frac{|z|\sqrt{R^2 - z^2}}{R}$$

Estas ecuaciones se resumen en las parametrizaciones en z (que como siempre llamamos t) siguientes

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \left(R^2 - t^2\right)/R \\ t\sqrt{R^2 - t^2}/R \\ t \end{pmatrix}, \; \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \left(R^2 - t^2\right)/R \\ -t\sqrt{R^2 - t^2}/R \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [-R, R].$$

En estas parametrizaciones, $\vec{r}_1$ es una mitad del 8 y $\vec{r}_2$ el complemento.

4. Ejercicios Adicionales

1. Determinar la parametrización de una curva plana tal que el producto de las distancias a dos focos en la abscisa es constante (Lemniscata).

2. Una circunferencia de ecuación $(x-2a)^2+y^2=a^2$ es utilizada para construir el Cissoide de Diocles. Se tienen una recta de ecuación $x=2a$, y otra de longitud variable que parte del origen O, corta a la circunferencia en A, pasa por el punto P quien describe la trayectoria, y termina en el punto B móvil sobre la recta. La condición geométrica que define al Cissoide, es que los trazos $\bar{OP}$ y $\bar{PB}$ son iguales, a medida que se mueve el punto B sobre la recta.

   a) Encontrar la parametrización. Resp. $\alpha(t)=(\frac{2at^2}{1+t^2},\frac{2at^3}{1+t^2})$.

   b) Demuestre que el 0 es el único punto no regular (derivada nula) y que la distancia horizontal a la recta $x=2a$ tiende a 0 si $t\to\infty$.

3. Demostrar que la longitud de la curva plana definida por $\gamma(t)=(t,t\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{t}))$ con $t\in[0,1]$ es infinita. Indicación. Acote la integral por una suma, fijándose en la geometría de los máximos de esta curva.

4. Para la curva definida por $y=x^3$, $z=\frac{\sqrt{6}}{2}x^2$, encontrar la longitud de la curva.

5.

   a) Sea $\sigma(s)\in C^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva. Demostrar que una expresión para la torsión $\tau(s)$ es
   $$\tau(s)=-\frac{[\sigma'(s)\times\sigma''(s)]\cdot\sigma'''(s)}{||\sigma''(s)||^2},$$
   donde $\frac{d\hat{b}}{ds}(s)=\tau(s)\hat{n}$.

   b) Calcular la torsión de la hélice $\sigma(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t,\mathrm{sen}\,t,t)$, con $t\in[0,4\pi]$.
   Nota. La parametrización no está en longitud de arco.

6. Sean Γ una curva plana y $f:R^2\to R$ una función diferenciable tal que $f(r,\theta)=0$ sobre la curva Γ. Probar que el vector $\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta}$ es normal a la curva Γ.

7. Sea $\gamma(t)=(Re^{-at}\cos t,Re^{-at}\,\mathrm{sen}\,t,t)$, con $t\in[0,4\pi]$. Determinar la parametrización en longitud de arco, la curvatura y la binormal en cada punto de la curva.

8. Si $u,v:R\to R^3$, son dos funciones diferenciables tales que
   $$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t)+Bv(t)\\ v'(t) &= Cu(t)-Av(t), \end{aligned}$$
   con $A,B,C\in R^3$, constantes, probar que $u(t)\times v(t)$ es constantes para todo t.

Si desea hacer más ejercicios, se puede dirigir a la página web de publicaciones del DIM y bajar las numerosas listas de ejercicios y problemas de controles.

`http://www.dim.uchile.cl/index.php?option=articlesdoc&task=viewarticle&idpublic=6`