

## Guía de Resolución de EDP's vía Método de las Características

Ma26-B Matemáticas Aplicadas

Profesor: Rafael Correa

Auxiliares: Omar Larré, Tomas Spencer, Leonardo Zepeda

La forma más general de representar cualquier ecuación diferencial de primer orden a dos variables independientes  $x$  e  $y$  es:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}$$

Donde  $F$  es una función dada y  $u = u(x, y)$  es una función desconocida de sus variables  $x$  e  $y$ . Y por comodidad notaremos  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$  y  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ .

Ahora sólo trabajaremos con ecuaciones que llamaremos *Ecuaciones Diferenciales Cuasi Lineales* que tienen la forma:

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

En donde algunos ejemplos son:

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= 0 \\ nu_x + (x + y)u_y &= u + e^x \\ yu_x + xu_y &= xy \\ (y - z)u_x + (z - x)u_y + (x - y)u_z &= 0 \\ x(y^2 + u)u_x - y(x^2 + u)u_y &= (x^2 - y^2)u \\ (y^2 - u^2)u_x - xyu_y &= xu \end{aligned}$$

### Resolución de una Edp:

1. Transformar la Edp a la forma canónica, i.e.

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

2. Luego Imponer las curvas Características:

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)}$$

3. Resolver Las Ecuaciones Diferenciales que se obtendrán de las igualdades de arriba (si  $c(x, y, u) = 0$  entonces  $du = 0$  y así para cualquier coeficiente que sea nulo) hasta obtener relaciones de la forma,

$$\phi(x, y, u) = C_1 \quad \text{y} \quad \psi(x, y, u) = C_2$$

(esta es la parte difícil ya que generalmente hay varios trucos dentro de esto, y hay que tener siempre presente los diferenciales totales, factores integrantes y todo lo aprendido en el curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias)

4. Una vez hecho esto, la solución tendrá la forma:

$$f(\phi, \psi) = 0 \quad \text{para una función } f \text{ arbitraria,}$$

pero en particular puede ser de la forma:  $f(\phi, \psi) = \phi - g(\psi) = 0$  con  $g$  como función arbitraria.

5. Casi siempre una vez ya encontrada la solución general se procede a imponer la información de Cauchy, pero en el desarrollo hay que tener el cuidado de ir dejando las funciones  $\phi$  y  $\psi$  de manera que sea cómodo imponer las condiciones.

Generalmente estos son los 6 pasos a seguir al resolver Edp's vía Características, pero hay que considerar de que hay veces en los cuales los pasos no van en este orden, en fin mostraremos algunos ejemplos para intentar una idea lo más clara posible de como emplear este método:

**Example 1** Resuelva  $3u_x + 2u_y = 0$  con la información  $u(x, 0) = h(x)$

Como la ecuación ya está en la forma Canónica simplemente reconocemos términos

$$a(x, y, u) = 3, \quad b(x, y, u) = 2, \quad c(x, y, u) = 0$$

Luego Imponiendo las Ecuaciones de las Curvas Características obtenemos:

$$\frac{dx}{3} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{0} \text{ luego } du = 0,$$

y de la primera igualdad obtenemos  $2dx - 3dy = 0$ , el cual es el diferencial total de  $2x - 3y = C_1$ , pero haremos un pequeño cambio en esta última ecuación por algo equivalente pero que después nos ayudará al imponer la información de Cauchy que es dejar que  $C_1$  absorba un medio y dejar la relación como:

$$\phi(x, y, u) \equiv x - \frac{3y}{2} = C_1$$

Y como  $du = 0$  entonces  $u = C_2$  que será nuestro  $\psi$ , i.e.  $\psi(x, y, u) \equiv u = C_2$

Luego nuestra solución general será:

$$f\left(x - \frac{3y}{2}, u\right) = 0, \text{ lo cual equivale a}$$

$$u(x, y) = g\left(x - \frac{3y}{2}\right), \text{ con } g \text{ arbitraria,}$$

y ahora aplicando la información de Cauchy

$$u(x, 0) = h(x) = g(x),$$

con lo cual encontramos la "forma" que tiene  $g$ , por lo cual la solución nos queda como:

$$u(x, y) = h\left(x - \frac{3y}{2}\right)$$

*Lo cual satisface todas las condiciones necesarias.*

**Example 2** Resuelva  $au_x + bu_y = cu$  con la información de Cauchy  $u(x, 0) = h(x)$ .

*La ecuación está en la forma canónica por lo cual simplemente imponemos las ecuaciones de las curva características, i.e.*

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{cu}$$

*de la primera Igualdad obtenemos  $b dx - a dy = 0$  es cual es un diferencial total de  $bx - ay = C_1$ , el cual definiremos como nuestro  $\phi$ , i.e.*

$$\phi(x, y, u) \equiv x - \frac{ay}{b} = C_1$$

*Ahora jugando un poco con las igualdades entre el primer y tercer término, junto con el segundo y tercer, obtenemos:*

$$\left. \begin{array}{l} dx = \frac{adu}{cu} \\ dy = \frac{adu}{cu} \end{array} \right\} dx + dy = \frac{(a+b)du}{cu} \text{ luego integrando obtenemos:}$$

$x + y = \frac{a+b}{c} \ln u + C_2 \Leftrightarrow \ln u - \frac{c}{a+b}(x+y) = C_2$  esto absorbiendo constantes, con lo cual aplicando exponencial llegamos a:

$$ue^{\frac{c}{a+b}(x+y)} = C_2$$

*con lo cual llegamos a algo relativamente complicado, por lo cual dejaremos descansar un rato esta relación para ver si podemos obtener alguna más simple, entonces considereremos*

$$dx = \frac{adu}{cu}, \quad \text{con lo cual obtenemos :}$$

$$\frac{x}{a} - \frac{\ln u}{c} = C_3 \text{ luego realizando el mismo procedimiento anterior llegamos a}$$

$$ue^{-\frac{cx}{a}} = C_3 \text{ que es bastante más simple que la anterior y la llamaremos}$$

$$\psi(x, y, u) \equiv ue^{-\frac{cx}{a}} = C_3.$$

*Entonces nuestra solución general está dada por:*

$$f\left(x - \frac{ay}{b}, ue^{-\frac{cx}{a}}\right) = 0$$

*Con  $f$  arbitraria, lo cual es equivalente a escribir:*

$$u(x, y) = e^{\frac{cx}{a}} g\left(x - \frac{ay}{b}\right)$$

Y aplicando ahora la información de Cauchy  $u(x, 0) = h(x)$ , tendremos que:

$$u(x, 0) = h(x) = e^{\frac{cx}{a}} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = e^{-\frac{cx}{a}} h(x)$$

Con lo cual conocemos la forma de  $g$  y ahora simplemente reemplazando.

$$u(x, y) = e^{\frac{cx}{a}} e^{-\frac{cx}{a} + \frac{cy}{b}} h\left(x - \frac{ay}{b}\right) = e^{\frac{cy}{b}} h\left(x - \frac{ay}{b}\right)$$

Solución que satisface todo lo pedido.

**Example 3** Resuelva  $xu_x + yu_y = xe^{-u}$  con la información  $u = 0$  si  $y = x^2$

Como la ecuación ya está en la forma canónica, procedemos a imponer las ecuaciones de las curvas características, i.e.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{xe^{-u}}$$

Luego de la primera igualdad resolvemos y obtenemos:

$$\ln x = \ln y + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x - \ln y = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln \frac{y}{x} = -C_1$$

Lo cual aplicando exponencial y absorbiendo constantes

$$\phi \equiv \frac{y}{x} = C_1$$

Ahora de la igualdad entre el primer y el tercer término resolvemos la siguiente ecuación

$$dx = e^u du$$

Que integrando llegamos

$$\psi \equiv e^u - x = C_2$$

Con lo cual la solución general queda dada por:

$$f\left(e^u - x, \frac{y}{x}\right) = 0$$

o equivalentemente:

$$e^u = x + g\left(\frac{y}{x}\right)$$

con  $f$  y  $g$  funciones arbitrarias.

Aplicando ahora la información de Cauchy, tendremos que:

$$e^0 = x + g\left(\frac{x^2}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 1 - x$$

Con lo cual la solución queda dada por

$$e^u = x + 1 - \frac{y}{x}$$

o equivalentemente por

$$u = \ln\left(x + 1 - \frac{y}{x}\right)$$

### Ejercicios:

1. Resuelva los siguientes problemas con la información de Cauchy asociada:

- (a)  $3u_x + 2u_y = 0$  con  $u(x, 0) = \sin x$
- (b)  $yu_x + xu_y = 0$  con  $u(0, y) = e^{-y^2}$
- (c)  $xu_x + yu_y = 2xy$  con  $u = 2$  en  $y = x^2$
- (d)  $u_x + xu_y = 0$  con  $u(0, y) = \sin y$
- (e)  $u_x + xu_y = (y - \frac{1}{2}x^2)^2$  con  $u(0, y) = e^y$
- (f)  $xu_x + yu_y = u + 1$  con  $u(x, y) = x^2$  en  $y = x^2$

2. Resuelva la ecuación:

$$u_x + xu_y = y$$

con la información de Cauchy

$$u(0, y) = y^2 \quad u(1, y) = 2y$$