

Tarea # 2
Matematicas Aplicadas

Prof. Rafael Correa

Auxs. Omar Larré, Tomas Spencer, Leonardo Zepeda

Fecha Entrega: El mismo dia que el control 2. Recuerden que no es obligatoria pero si les ayudara muchisimo.

P1. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funcion continua en 0, tal que $f(z+w) = f(z)f(w)$ $\forall w, z \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es continua en todo el plano complejo.

P2. Supongamos que f es analitica en el abierto $U \subset \mathbb{C}$. Definamos $U^* = \{\bar{z} : z \in U\}$ y $g(z) = f(\bar{z})$ para $z \in U^*$. Pruebes que g es analitica en U^* y que $g'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$.

P3. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|a| = |b| > 1$ y la sucesion $a^n - b^n$ es acotada. Pruebe que $a = b$. Piense en usar *Liouville* para la variable n .

P4. Estudie en que puntos del plano complejo son analiticas las siguientes funciones:

i) $e^x(\cos y - i \sin y)$ ii) $(z - i)\bar{z}$ iii) $z = x + iy$

y calcule sus derivadas donde estas existan.

P5. Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre el radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ donde $c_k = a + 1$ si k es par y $c_k = 1$ si k es impar. Compruebe que $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{a+1+z}{1-z^2} \quad \forall |z| < R$

Hint: Recuerde la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1, x \in \mathbb{C}$.

P6. Considere la serie $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ con $a_k = 2$ si k es par y $a_k = 1$ si no. Determine el radio de convergencia R de esta serie y pruebe que ella converge para $|z| < R$ y diverge para $|z| \geq R$. Compruebe que para $|z| < R$ se tiene $S(z) = (2+z)/(1-z^2)$.

P7. Sea $D = \{x + iy : x > 0, y > 0\}$ y $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en \bar{D} y holomorfa en D .

Suponga que existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$ para todo $z \in D, |z| \leq 1$.

Pruebe que para todo $\theta \in [0, \pi/2]$ se tiene:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = e^{i\theta} \int_0^{\infty} f(e^{i\theta} x) dx$$

y utilice lo anterior para $f(z) = \frac{e^{i\theta}}{(1+z)^2}$ y $\theta = \pi/2$ para probar que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x)^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx = 1$$