1. Clase Auxiliar 7 de Agosto

MA26-B Matemáticas Aplicadas

Problema 1: Ecuaciones Intrínsecas

Sea una curva γ y su parametrización natural $\vec{r}(s)$, estudiaremos la curvatura y la torsión de γ, la cual depende del punto $\vec{P}$ en el cual estemos (por lo cual se recurre a la parametrización natural) y definimos las ecuaciones intrínsecas de γ como:

$$\kappa = f(s)$$
$$\tau = F(s)$$

en donde s representa la longitud de arco. Las cuales deben sus nombres al hecho de que dos curvas con las mismas ecuaciones intrínsecas, son idénticas a excepción de posiblemente su orientación en el espacio, i.e. que su geometría es la misma.

Ahora planteamos como ejercicio la demostración de este hecho .

Sean curvas $\gamma_1 \wedge \gamma_2$ tales que admiten una parametrización natural Analítica, demostrar que si sus ecuaciones características son iguales, entonces las curvas tienen la misma geometría.

Solución :

En primer lugar tomaremos un punto común entre ambas curvas, esto es posible ya que, podemos trasladar una curva hasta que haya al menos un punto en común, que llamaremos $\vec{P}$, ahora bien, en este punto calculamos la tríada ortonormal $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ en ambas curvas y luego mediante una rotación rígida hacemos que coincidan los de γ_1 y de γ_2 de tal manera que la tríada esté alineada.(Debemos recordar que estamos buscando que las geometrías sean iguales, y es claro ver que las traslaciones ni las rotaciones la alteran).

Ahora queremos saber como es la geometría que adoptan las curvas en las cercanías de $\vec{P}$ para lo cual calculamos:

$$\frac{d(\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2)}{ds} = \vec{T}_1 \cdot \kappa\vec{N}_2 + \kappa\vec{N}_1 \cdot \vec{T}_2$$
$$\frac{d(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2)}{ds} = \vec{N}_1 \cdot (-\kappa\vec{T}_2 + \tau\vec{B}_2) + \vec{N}_2 \cdot (-\kappa\vec{T}_1 + \tau\vec{B}_1)$$
$$\frac{d(\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2)}{ds} = -\vec{B}_1 \cdot \tau\vec{N}_2 - \tau\vec{N}_1 \cdot \vec{B}_2$$

Lo cual se obtiene al derivar el producto punto, y aplicando las ecuaciones de Frenet donde sea necesario.

Luego sumamos todas las ecuaciones, con lo cual obtenemos:

$$\frac{d(\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2 + \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2)}{ds} = 0$$

lo cual implica que :

$$(\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2 + \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2) = c$$

pero recordemos que en $\vec{P}$ los tres vectores son colineales, por lo cual c=3. Pero recordemos que los tres vectores están normalizados i.e. son de módulo 1, y además tenemos que si $\vec{a} \wedge \vec{b}$ son vectores entonces:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\|$$

por lo cual podemos ver que la expresión alcanza siempre su mayor valor por lo cual los vectores tangente, normal y binormal de las dos curvas son iguales, i.e.

$$\begin{array}{c} \vec{T}_1 \equiv \vec{T}_2 \\ \vec{N}_1 \equiv \vec{N}_2 \\ \vec{B}_1 \equiv \vec{B}_2 \end{array}$$

Luego podemos decir que :

$$\frac{d\vec{\hat{r}}_1}{ds} = \frac{d\vec{\hat{r}}_2}{ds}$$

o bien que $\vec{\hat{r}}_1 \equiv \vec{\hat{r}}_2$ localmente, es decir que las curvas son idénticas en las cercanías de $\vec{P}$ pero como la parametrización es Analítica, las curvas son idénticas en todas partes.

Observaciones: En este ejercicio, es necesario recordar, que una función analítica es aquella que en cualquier punto se puede hacer un desarrollo en serie, por lo cual si dos funciones son iguales, implica que sus respectivas series son iguales, luego la resta de ellas es igual a cero, si esto ocurre en un abierto, las soluciones son infinitas no numerables, por lo cual ambas funciones son siempre iguales ya que sus series de potencias lo son en todos lados.

Y además con respecto a que es una rotación rígida, es aquella en la cual la distancias relativas dentro de la figura no se ven alteradas, como lo es el hacer bailar un trompo, en donde si marcamos dos puntos en éste, no importa si está detenido sobre una mesao bien bailando en el suelo, siempre la distancia entre ambos se mantiene constante, en otras palabras no cambia la forma del trompo, al trasladarlo o al hacerlo girar.

Ahora en tercer y último lugar, la utilidad de este resultado, es que si conozco dos funciones, f y F, se puede conocer toda la geometría de una curva, en donde ambas funciones me definen una única curva, lo cual se aplica a cohética y aeronáutica en donde la curvatura y la torsión pueden ser expresadas en función de los ángulos formados por los alerones, con lo cual se puede predecir la forma de un rizo, o bien la trayectoria de un vuelo.

Problema 2: Indicatriz Esférica

Cuando se estudia una familia de vectores unitarios, es casi siempre conveniente, darles un origen en común y luego considerar la figura que forman sus puntos de término, obviamente esta figura está sobre una esfera, entonces podemos definir la Indicatriz Esférica de los vectores tangentes de una curva γ parametrizada naturalmente por $\hat{r} = \hat{r}(s)$ como:

$$\hat{r}_1 = \frac{d\hat{r}}{ds} = T$$

donde $\hat{r}_1 = \hat{r}_1(s_1)$ donde s_1 es el largo de arco de la indicatriz.

Ahora estudiremos algunas propiedades de esta nueva curva γ_1 para al final calcular su curvatura, en función de la curvatura y torsión de la curva γ original.

Para eso veremos el vector tangente a la indicatriz el cual por definición, y usando la regla de la cadena podemos igualar a:

$$T_1 = \frac{d\hat{r}_1}{ds_1} = \frac{dT}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \kappa N \frac{ds}{ds_1}$$

Lo cual nos dice que el vector tangente es paralelo a la normal de la curva original en el mismo punto, además como T está normalizado obtenemos que $T_1 = 1$ y $1 = \kappa \frac{ds}{ds_1}$, con lo cual buscaremos la curvatura de la indicatriz.

Podemos observar de la primera ecuación de Frenet, que si derivamos la Tangente, obtenemos la curvatura por la normal, con lo cual, igualaremos esto al cálculo hecho mediante regla de la cadena, i.e.

$$\frac{dT_1}{ds_1} = \kappa_1 N_1 = \frac{dN}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{\kappa}(-\kappa T + \tau N)$$

la última igualdad se tiene de usar la segunda fórmula de Frenet,y el uno partido por κ de lo que se encontró un poco más arriba, al imponer que T_1 estaba normalizado, ahora bien si extraemos norma en la ecuación.

$$\kappa_1 N_1 = \frac{1}{\kappa}(-\kappa T + \tau N) / \left\| \cdot \right\|^2$$

y como T y N son ortonormales, es directo obtener que

$$\kappa_1^2 = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\kappa^2}$$

Problema 3: Lemniscata Plana

Parametrice una curva plana cuyos puntos satisfacen qe el producto de las distancias a dos focos en la abscisa de coordenadas (a,0) y (-a,0) es constante e igual a $b = a^2$

Solución :

Definimos para un punto (x, y) de la curva las distancias al foco izquierdo y derecho como:

$$d_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$
$$d_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

Ahora imponemos la condición de los productos:

$$d_1^2 d_2^2 = a^4$$

Luego reemplazando y desarrollando obtenemos:

$$\begin{gathered}
[(x-a)^2+y^2][(a+x)^2+y^2]=a^4 \\
(\mathrm{a}^2-x^2)^2+y^2[(x-a)^2+(x+a)^2]+y^4=a^4 \\
\mathrm{a}^4-2a^2x^2+x^4+2y^2[x^2+a^2]+y^2=a^4 \\
\mathrm{x}^4-2a^2x^2+2x^2y^2+y^4=0 \\
(\mathrm{x}^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=0
\end{gathered}$$

Ahora escribiremos esto en polares, para obtener una parametrización que dependa del ángulo en el cual se encuentre, i.e. utilizamos el siguiente cambio de variable:

$$x = r\cos\theta \wedge y = r\sin\theta$$

con las siguientes restricciones:

$$r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

Luego aplicando esto a la ecuación anterior:

$$\begin{gathered}
r^4 - 2a^2r^2\underbrace{(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}_{-\cos 2\theta} = 0 \\
\Rightarrow r^2(r^2-2a^2\cos 2\theta)=0
\end{gathered}$$

Obviamente la solución trivial r=0, nos lleva a un sólo punto en origen que no nos intersa, por lo cual consideramos:

$$\begin{gathered}
r^2-2a^2\cos 2\theta = 0 \\
\Leftrightarrow r^2 = 2a^2\cos 2\theta
\end{gathered}$$

Pero vemos que esta ecuación tiene incongruencias ya que $r \geq 0$ por lo cual como el coseno tiene valores negativos entre $[\pi/2, 3\pi/2]$, entonces debemos extraer los ángulos en donde, la parametrización viola las restricciones, por lo cual tenemos que:

$$2\theta \in [0, 4\pi] \wedge \cos 2\theta \geq 0$$

Lo cual implica que:

$$\begin{gathered}
2\theta \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 5\pi/2] \cup [7\pi/2, 4\pi] \\
\Leftrightarrow \theta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]
\end{gathered}$$

Ahora por simplicidad llamaremos $[0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi] \equiv \Theta$; pero observamos que para cumplir siempre las restricciones tenemos que hacer que $r(\theta)$ valga cero en $[0, 2\pi] - \Theta$, esto para mantener $r \geq 0$, con lo cual la parametrización queda definida como sigue:

$$r(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2a^2\cos 2\theta} & \text{si } \theta \in \Theta \\ 0 & \text{si } \theta \in \Theta^c \end{cases}$$