MA26B. Matemáticas Aplicadas.

Tarea de Series de Fourier.

Prof. Alberto Mercado
Aux. Adriana Piazza
07 de noviembre de 2006

1. Encuentra la serie de Fourier de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = |x|$ en $[-\pi, \pi]$.

   (b) $f(x) = ax$ en $[-\pi, \pi]$

   (c) $f(x) = ax^2$ en $[-\pi, \pi]$.

   (d) $f(x) = ax^2$ en $[0, 2\pi]$.

   (e) $f(x) = e^{\alpha x}$ en $[-\pi, \pi]$.

   (f) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ en $[-\pi, \pi]$.

   (e)
$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } -\pi < x < 0 \\ b & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

2. Desarrolle en serie de Fourier la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

   Aplique el teorema de convergencia para deducir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Desarrolle en serie de Fourier la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

4. Desarrolle en serie de Fourier la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$. Deduzca que:

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

   (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

   (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

5. Dada la función $f(x) = |x|$, encuentre:

   (i) Su serie de Fourier en el intervalo $[0, 2]$.

   (ii) Su serie de Fourier en el intervalo $[-1, 1]$.

   (iii) Su desarrollo en series de senos en $[0, 1]$

   (iv) Su desarrollo en series de cosenos en $[0, 1]$

   Indicación: Para (iii) y (iv) primero extender f de manera adecuada (par o impar) al intervalo $[-1, 1]$.

   Observación: Uno de los teoremas sobre convergencia (puntual) de series de Fourier más útil es el suguiente:

   Teorema 1 *Si f es una función definida en $[-L, L]$ tal que tiene derivada continua en todo el intervalo,* **excepto quizá en un número finito de puntos***, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

   para todo $x \in (-L, L)$. Y en los extremos se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(-L) = \lim_{n\to\infty} S_n f(L) = \frac{f(-L) + f(L)}{2}$$

   donde $S_n f(x)$ es la suma parcial (hasta el término n) de la serie de Fourier de f evaluada en el punto x. Además $f(x^-)$ es el límite por la izquierda de f en x, y $f(x^+)$ por la derecha.

   (es decir, la serie de Fourier converge ya sea al valor de f, o al promedio de los límites laterales).